

Sulla natura degli oggetti matematici, in relazione con la didattica della matematica

Bruno D'Amore e Martha Isabel Fandiño Pinilla

Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica, Università di Bologna

Silvia Sbaragli

Dipartimento Formazione e Apprendimento, Locarno, Svizzera

Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica, Università di Bologna

Abstract. *The studies on the nature of mathematical objects are manifold; they are needed not only when the scope of the study is epistemological but also (and perhaps more) when dealing with topics related to research in mathematics education. In this direction, the paper traces many classical and new analyses to make sense of certain current trends in mathematics education.*

Keywords: mathematical objects, mathematical concepts, scheme, realism, pragmatism, semiotic, EOS, objectivation theory, sociology, metacognition.

Sunto. *Gli studi sulla natura degli oggetti matematici sono molteplici; essi sono necessari non solo quando l'ambito di studio è quello epistemologico ma anche (e forse di più) quando si vogliono affrontare temi inerenti alla ricerca in didattica della matematica. In questa direzione, questo testo ripercorre molte analisi classiche e nuove per dare un senso a certe tendenze attuali della didattica della matematica.*

Parole chiave: oggetti matematici, concetti matematici, schema, realismo, pragmatismo, semiotica, EOS, teoria della oggettivazione, sociologia, metacognizione.

Resumen. *Los estudios sobre la naturaleza de los objetos matemáticos son múltiples; estos son necesarios no sólo cuando el alcance del estudio es epistemológico sino también, y tal vez más, cuando se quiere hacer frente a cuestiones relacionadas con la investigación en educación matemática. En este sentido, este texto vuelve a trazar muchos análisis clásicos y nuevos para dar sentido a algunas de las tendencias actuales en educación matemática.*

Palabras clave: objetos matemáticos, conceptos matemáticos, esquema, realismo, pragmatismo, semiótica, EOS, teoría de la objetivación, sociología, metacognición.

1. Premessa

Questo articolo può essere considerato come la prosecuzione a distanza di due precedenti (D'Amore, 2001a, 2001b), pubblicati in italiano e altre lingue, proposti in forma ridotta in varie occasioni, come seminari o conferenze in convegni internazionali.

A distanza di tanti anni, anche grazie agli studi e alle successive ricerche dei tre autori, alcune delle idee di allora sono state modificate e approfondite; non solo, ma sono sempre più stretti i rapporti di ricerca con studiosi del calibro di Juan D. Godino e Luis Radford.¹

Appare dunque necessario ri-fare il punto sul tema relativo alla natura degli oggetti della matematica che appare oggi ancora più strettamente connesso con le sempre più numerose ricerche fondazionali in didattica della matematica.

2. Riflessioni di base

Attorno alla natura dei concetti sono stati scritti libri interi e filosofi di primo piano si sono occupati di questo tema.²

Nei dizionari di filosofia si trovano definizioni abbastanza simili relativamente all'idea di *concetto*; quelle di stampo aristotelico fanno riferimento a quei procedimenti che rendono possibile la descrizione, la classificazione e la previsione degli oggetti conoscibili (Abbagnano, 1971, p. 146). Da notare che, in questa accezione:

- Il concetto è un processo, dunque qualche cosa di dinamico e non di statico.
- Vi può essere concetto di qualsiasi cosa, dagli oggetti concreti (il concetto di *tavolo*) a quelli astratti (il concetto di *numero 3*); da quelli reali a oggetti irreali, inesistenti, immaginari (il concetto di *cavallo alato*).
- C'è differenza tra *nome* e *concetto*; basti pensare che nomi diversi possono essere pertinenti allo stesso concetto.

A questo punto scattano due problematiche fondamentali:

- la *natura* del concetto;
- la *funzione* del concetto.

La domanda sulla *natura* del concetto ha avuto, in filosofia, due risposte piuttosto diverse:

- Il concetto è l'*essenza* stessa delle cose e dunque la loro essenza necessaria (ciò per cui le cose non possono che essere così come sono); pur tra mille diversità, ovviamente, diremmo che questa idea, nata con Socrate, raffinata da Aristotele, ha avuto molti seguaci fino a Husserl.

¹ Si vedano: D'Amore, 2006a, 2006b, 2006c, 2007a, 2007b, 2007c, 2008, 2011, 2012; D'Amore e Fandiño Pinilla, 2007a, 2007b, 2008a, 2008b; D'Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani, Santi e Sbaragli, 2009; D'Amore, Fandiño Pinilla, Santi e Sbaragli, 2011; D'Amore, Font e Godino, 2007a, 2007b; D'Amore e Godino, 2006, 2007; D'Amore e Radford, 2017; D'Amore, Radford e Bagni, 2006; D'Amore e Sbaragli, 2005; Radford e D'Amore, 2006; Santi e Sbaragli, 2007; Sbaragli, 2005.

² Per la redazione di questo paragrafo 1, prendiamo spunto prevalentemente da D'Amore (1999a), cap. 6.

- Il concetto è il *segno* dell'oggetto, dunque si trova con esso in rapporto di significazione; l'idea è sostanzialmente stoica, ma ripresa in epoca medioevale, risalendo forse a Boezio e poi ad Abelardo; ma è stata fatta propria dai logici dell'inizio del XX secolo.

La domanda sulla *funzione* del concetto ha dato luogo a due concezioni fondamentalmente diverse:

- di tipo *finale*:
 - Il concetto ha come scopo quello di esprimere o rivelare la sostanza delle cose.
- di tipo *strumentale*; e allora si hanno vari ulteriori aspetti:
 - Il concetto è uno strumento per *descrivere* gli oggetti e permetterne il *riconoscimento* (Epicurei e Stoici, anticamente; alcuni filosofi della scienza nel XX secolo).
 - Il concetto è uno strumento per *classificare* i concetti nel modo più *economico* possibile (a questa idea aderisce, per esempio, Mach; e qui si scatena la questione secondo la quale quelli scientifici sono degli pseudo-concetti nel senso crociano).
 - Il concetto è uno strumento per *organizzare* i dati dell'esperienza in modo da stabilire tra essi *connessioni* di carattere logico (idea accettata da Duhem).
 - Il concetto è uno strumento per *prevedere* (possiamo citare qui Dewey e Quine, per esempio, anche se per motivi completamente diversi).

Tutt'altro modo di discorrere filosoficamente dei concetti è quello di scuola francese e tedesca. Più che *definire* i concetti, si cerca di analizzare *come si formino* i concetti. Abbiamo allora le seguenti distinzioni:

- Concetti *a priori* o concetti *puri* (Kant): sono i concetti che non si traggono dall'esperienza: concetti di unità, di pluralità eccetera; troviamo tali esempi proprio in Kant.
- Concetti *a posteriori* o concetti *empirici*: sono nozioni generali che definiscono classi di oggetti dati o costruiti; esempio: concetto di *vertebrato*, di *piacere* eccetera; essi concernono tutti e soli quegli individui che formano queste classi, sia quando li si può isolare (*un gatto*, scelto nella classe dei vertebrati) sia quando tale isolamento è impossibile (come sarebbe nel caso di *un piacere*).³

Dato che ci si riferisce a classi, è chiaro come si possa parlare, in ogni caso, di *intensione* e di *estensione* di un concetto (naturalmente si devono ammettere concetti ad estensione vuota ...).

Ma che cosa vuol dire, etimologicamente, *concetto*? Il suo nome latino (*conceptus*, da *concupere*) fa chiaro riferimento al risultato dell'atto di

³ Questa è, per esempio, la posizione assunta da André Lalande nel suo *Vocabulaire technique et critique de la philosophie* (Lalande, 1926).

concepimento o generazione della mente nel suo staccarsi dall'immediatezza delle impressioni sensibili e delle rappresentazioni particolari e nel suo giungere a una significazione universale. Ma allora si potrebbe pensare a una coincidenza con la parola *idea*; oppure si potrebbe far coincidere il concetto con il $\lambda\acute{o}\gamma\omicron\zeta$ (il *verbum*, la parola mentale); oppure ancora con *nozione*.

Ciascuna di queste interpretazioni (e altre ancora) vennero nel tempo sostenute da eminenti filosofi.

Ciò ci autorizza a confondere d'ora in poi *concetto* con *idea*, anche se in *idea* c'è implicita anche una sorta di *rappresentazione* mentre il *concetto* potrebbe esserne indipendente.

Se si passa a dizionari della lingua comune, non filosofici, editi per esempio in Italia, si trova:

- “Ciò che la mente intende e comprende per mezzo dell'osservazione, riflessione e induzione” (Zingarelli, 1994, p. 416); a volte, oltre a intende e comprende, c'è un *conclude*.
- “La creatura concepita – la cosa immaginata e inventata dal nostro intelletto” (Fanfani, 1855, p. 382).
- “Pensiero che la mente forma derivandolo da due o più idee, assurgendo dall'individuale al generale; [ma anche:] *idea, opinione*” (Melzi, 1928, p. 206).
- “Pensiero, in quanto concepito dalla mente; più in particolare: *idea, nozione* esprimente i caratteri essenziali e costanti di una data realtà che la mente si forma afferrando insieme (...) i vari aspetti di un determinato oggetto che alla mente preme aver presenti nel suo complesso” (Istituto Giovanni Treccani, 1929, p. 342).

Su un dizionario a carattere filosofico si trova:

- “Nel suo significato etimologico è il risultato dell'atto di concepimento o generazione della mente nel suo staccarsi dall'immediatezza delle impressioni sensibili e delle rappresentazioni particolari e nel suo assurgere ad una significazione universale” (Centro di studi filosofici di Gallarate, 1957, p. 1538).

Interessante può essere, per i nostri scopi introduttivi, vedere che uso fanno di questo termine alcuni letterati. Dante Alighieri usa *concetti* nel senso di *concezioni* in *Paradiso* III 60; in questo stesso senso, lo si trova in molti letterati di tutti i Paesi del mondo. Ma è chiaro che i letterati fanno l'uso più vasto possibile di tale parola, come del resto si fa, ed è giusto che si faccia, nella lingua comune, dove *concetto* sta anche per *opinione, modo di intendere, principio, progetto, intenzione, stima, reputazione* eccetera, a seconda della lingua.

Tutto ciò solo per testimoniare l'enorme difficoltà e le varietà interpretative che si incontrano quando si voglia affrontare in modo significativo e un po' rigoroso una problematica che pone a monte di tutto una

parola per la cui definizione sono state impiegate migliaia di anni.

3. Concetti: terminologia psicologica, sul versante didattico

Se vogliamo fare progressi significativi e specifici, occorre cercare testi più adatti, più consoni allo spirito nell'ambito del quale vogliamo muoverci.

Non possiamo allora non ricordare immediatamente che Vygotskij (1960/1981, 1934/1962) lavorò a lungo proprio sulla formazione dei concetti nell'ambito di un suo più vasto campo di ricerca sul come cause sociali influiscano sulle differenze psichiche degli individui (influenza dell'ambiente sulle differenze psichiche). Egli parla allora proprio di *sviluppo concettuale*, distinguendo sostanzialmente tre fasi (la cosa è in realtà assai più complessa, ma qui sorvoliamo):

- *fase dei mucchi sincretici*, caratterizzata dalla mancanza di una referenza oggettiva stabile nella classificazione;
- *fase del pensiero per complessi*: il soggetto tende verso un modo oggettivo di pensare, riconosce nessi concreti, ma non logici o astratti;
- *fase concettuale*: il soggetto opera utilizzando la capacità di astrarre.

Attenzione particolare Vygotskij pose alla formazione dei concetti scientifici in particolare di tipo scolastico, durante l'infanzia, evidenziando l'ancoraggio che i bambini fanno di tali concetti a componenti concreto-figurative, molto prima che alle componenti logiche o astratte; tale priorità sembra essere necessaria per la fondazione stessa del concetto. A proposito dell'ordine dell'acquisizione dei concetti, Vygotskij (1934/1962) fa una celebre affermazione, a prima vista paradossale, secondo la quale i concetti scientifici si sviluppano *prima* di quelli spontanei; ma Vygotskij dice anche: "se il programma fornisce il materiale appropriato" (p. 147); insomma: la supposta necessità infantile di far precedere una fase empirica a quella astratta di apprendimento non sembra essere così totalmente spontanea. [Torneremo sui concetti scientifici e su Vygotskij in sezione 5].

Questa posizione non può non richiamare alla mente quella di Bruner (1964), quella della celebre terna dei modi di rappresentazione dei concetti:

- *esecutiva*,
- *iconica*,
- *simbolica*,

che, per inciso, si riferiva principalmente proprio alla matematica.

Facciamo un esempio celeberrimo: l'acquisizione del concetto di misura da parte dei bambini di età 3–5 anni; e contrapponiamo le modalità di Piaget a quelle di un famoso appartenente alla scuola sovietica, Gal'perin.

Nella descrizione che fanno Piaget, Inhelder e Szeminska (1948) dell'apprendimento spontaneo del concetto di misura, al bambino si propongono situazioni empiriche in cui si richiede di misurare, fino ad arrivare

a un concetto astratto, rispettando la teoria degli stadi evolutivi. Il comportamento del bambino seguirebbe un famoso *iter*, molto diffuso ancora oggi nella scuola dell'infanzia e nel primo ciclo della scuola primaria non solo italiana: misure spontanee con unità non standard (palmi, matite, gomme, passi eccetera), con predominanza dell'attività percettiva; scelta più accurata dell'unità di misura, capacità di riportare più volte l'unità; consapevolezza della conservazione delle grandezze (e delle misure). Come si vede: abbondanza di terminologia tipicamente piagetiana.

La prova di Gal'perin (1969/1977) lega di più la misurazione all'idea di numero anche basandosi sulle idee fondazionali di Kolmogorov, il celeberrimo matematico russo, fondatore, tra l'altro, della teoria assiomatica della probabilità. La prima tappa è di giungere all'idea di unità; poi al fatto che la misura rispetto a una data unità è un numero che può essere ricordato anche senza saperne il nome. Per esempio un tavolo misura come 5 matite; un bambino può anche non conoscere il nome di questo numero, ma fare riferimento a questa quantità, semplicemente mettendo da parte una matita ogniqualvolta questa unità è usata; a quel punto la misura viene fatta coincidere con il numero di volte in cui l'unità è stata usata. Altro esempio diffuso è riempire una brocca con dei bicchieri d'acqua per valutarne la capacità; la tal brocca contiene tanta acqua quanto quei bicchierini raccolti accanto. Per finire, riconoscimento e accettazione della relatività del numero-misura, rispetto all'unità usata.

Ci pare che tutto ciò spieghi bene il perché dell'estremo interesse con il quale i più famosi teorici dell'apprendimento concettuale si siano interessati a questo tema; e continua a spingerci sempre più, almeno implicitamente, a capire che cosa essi intendano per *concetto*, almeno in ambito di apprendimento cognitivo.

4. I concetti nei processi di insegnamento-apprendimento

Si *devono* insegnare i concetti? Si *possono* apprendere i concetti? Più generale ancora: Hanno senso queste stesse domande?

Sono, le precedenti, questioni cardine sulle quali occorre riflettere e che troppo sbrigativamente e ingenuamente alcuni autori trattano.

Questa problematica si è sviluppata attorno agli anni '60, soprattutto nei paesi di lingua anglosassone, nel vastissimo movimento internazionale di rinnovamento dei curricoli che ha toccato tutto il mondo. Ciò è stato indotto certamente dalla grande rivalutazione educativa dei contenuti delle varie discipline e in particolare delle scienze e specificamente della matematica. In questo senso, certamente un artefice della svolta mondiale è stato Bruner.⁴ Ciò portò di conseguenza un profondo dibattito sul curricolo soprattutto relativo

⁴ Per capire il perché, si veda Tornatore (1974), cap. 9.

proprio al settore delle scienze in generale e della matematica in particolare.

Lo riassumiamo di seguito, cominciando da questa domanda, preliminare alle precedenti: a *che cosa* si deve educare, quando a scuola si fa scienza? Vi sono due risposte possibili:

- al *metodo scientifico*: l'obiettivo è di dare padronanza nella metodologia;
- all'acquisizione e padronanza dei *concetti essenziali* della scienza.

Il dibattito non era nuovo; la prima risposta si può certamente ricollegare al *metodo dell'intelligenza* di Dewey (1933/1961), ma gli anni '60 furono testimoni di un dibattito di fuoco all'interno del quale ebbero vita facile tutti coloro che propugnarono idee didattiche abbastanza ben congegnate.⁵

In questo dibattito, ben si inserisce un altro tipo di proposta, quella di Gagné (1965) che tende a separare la didattica dei concetti *concreti* da quella degli *astratti*; la concretezza e l'astrazione vanno viste in relazione alla qualità di riferimento degli oggetti considerati nei concetti:

- se si tratta di concetti derivati dall'osservazione empirica di oggetti, si tratta di *concetti concreti*;
- se si tratta di concetti derivati da definizioni e che implicano dunque relazioni astratte, si tratta di *concetti astratti*.

Gagné elabora una teoria delle gerarchie di apprendimento in cima alla quale, come ultimo punto, culminante, ci sono i concetti astratti.

Questa idea delle gerarchie spinse molti altri autori a ideare gerarchie simili, seguendo altri parametri; in particolare stiamo pensando ai lavori di Klausmeier, Gathala e Frayer (1974) e Klausmeier (1979, 1980) che dividono l'apprendimento dei concetti nella scuola di base in 4 livelli:

- *livello concreto*: il bambino riconosce un oggetto già visto, nella stessa situazione;
- *livello di identità*: il bambino riconosce un oggetto già visto, ma in condizioni diverse;
- *livello di classificazione*: il bambino riconosce che due cose sono simili per un certo aspetto e, generalizzando, le classifica insieme anche se non sono ancora chiari i criteri della classificazione;
- *livello formale*: il bambino sa dare un nome alla classe ottenuta nel terzo livello, cioè al concetto selezionato dagli attributi che gli hanno permesso la classificazione.⁶

A nostro avviso, in questa tipologia di analisi apprenditiva rientra la famosa gerarchia degli apprendimenti dovuta ai coniugi Van Hiele (1986) (si vedano: D'Amore, 1999a, pp. 86–89; Sbaragli & Mammarella, 2010). In tale modello

⁵ Sul dibattito, ma molto di più, si può vedere Pontecorvo (1983, pp. 262–263).

⁶ Maggiori chiarificazioni generali, specifiche sui legami tra i livelli di Klausmeier, le fasi di Gagné e gli stadi di Piaget, nonché esemplificazioni di applicazioni didattiche, possono essere rintracciate in Pontecorvo (1983).

si propongono 5 livelli di sviluppo del pensiero geometrico: *visivo, descrittivo-analitico, confronto, assiomatico, rigore*. In particolare:

- il livello zero, di base, della *visualizzazione*, del riconoscimento, nel quale le figure vengono riconosciute per la loro forma, nel complesso prototipico e non per le singole proprietà costitutive;
- il livello uno, *descrittivo* o *analitico*, nel quale si fa strada un complesso di relazioni fra le proprietà delle figure, ma come staccate, separate tra loro, il che permette di riconoscere proprietà delle figure o di loro classi, ma non relazioni fra figure;
- il livello due, del *confronto*, delle deduzioni informali, nel quale lo studente sa prendere in considerazione relazioni strutturali che legano tra loro classi di figure sulla base delle loro proprietà, per esempio che il quadrato è anche un rettangolo perché, pur avendo il quadrato specificità proprie, soddisfa però alle richieste per definire un rettangolo;
- il livello tre, *assiomatico*, nel quale lo studente conquista la capacità di effettuare *deduzioni formali*;
- il livello quattro che in genere si chiama strutturale o del *rigore* geometrico, nel quale lo studente sa compiere relazioni fra diversi sistemi assiomatici (per esempio sa riconoscere analogie e differenza fra un sistema assiomatico della geometria di Euclide e quello di una geometria non euclidea).

La teorizzazione dei Van Hiele propone anche le cosiddette “fasi” che permettono di descrivere i passaggi nei precedenti livelli, dall’uno all’altro:

- la fase uno, di *ricerca*, nella quale si fonda soprattutto un vocabolario adeguato;
- la fase due, di *orientamento diretto*, durante la quale il docente indirizza le modalità analitiche degli allievi;
- la fase tre, di *esplicitazione*, durante la quale gli studenti sono sempre più indipendenti nel loro lavoro ed esprimono pareri personali svincolati dal processo proposto in precedenza dall’insegnante;
- la fase quattro, di *orientamento libero*, durante la quale lo studente prende in esame diverse strategie e impara a fare uso personale delle proprie capacità;
- la fase cinque, di *integrazione*, durante la quale l’allievo si responsabilizza delle sue azioni, arrivando dunque a un nuovo dominio di conoscenza che gli permette di vedere la geometria, i suoi oggetti e le sue relazioni, da una panoramica diversa.

L’analisi critica di questa prospettiva di analisi ha mostrato che essa è soprattutto uno strumento per l’organizzazione curricolare della geometria, dalla primaria all’università, piuttosto che una teoria dell’apprendimento.

Torniamo ora al discorso generale.

Sembra che gli studi di come si sviluppino i concetti riguardino soprattutto la fascia d'età 3–10 e che sia necessario intrecciare questa ricerca con quella didattica. Quindi: sviluppo dei concetti e apprendimento, secondo la maggior parte degli autori, sono molto legati tra loro.

Si può arrivare a pensare che punto culminante dell'ontogenesi sia l'organizzazione della conoscenza per categorie? Secondo Lurija (1982) sì, e i metodi utilizzati in questo senso, a suo avviso, sono i seguenti:

- Metodo della *definizione del concetto*: si chiede di rispondere in modo spontaneo e libero a domande del tipo: “Che cosa è?”; le risposte possono essere specifiche, riferite cioè a particolarità, o di tipo categoriale.
- Metodo della *comparazione-differenziazione*: dati due oggetti diversi ma con qualche caratteristica comune, si richiede di dire quali siano queste caratteristiche comuni e le reciproche differenze.
- Metodo della *classificazione*: si danno più oggetti e si chiede di classificare un insieme, formato da tutti e soli quegli oggetti aventi una data caratteristica comune.
- Metodo della *formazione dei concetti artificiali*: si torna a Vygotskij, dato che si dà rilievo a concetti non spontanei; lo sperimentatore ha preordinato tutto per giungere a un ben stabilito concetto cui si voleva pervenire.

Va tuttavia detto che non si può non essere d'accordo con Cornu e Vergnoux (1992) quando affermano: “L'apprendimento di un concetto isolato è impossibile, dato che ogni concetto è correlato, collegato, ad altri. Si deve parlare allora di trame concettuali” (pp. 55–56). Su questo punto dovremo tornare tra breve (e rinviamo già a D'Amore, 1999a).

5. Il ruolo del linguaggio nell'apprendimento e nella formulazione dei concetti

In tutto ciò, è evidente, gioca un ruolo di straordinaria importanza il linguaggio. È ben noto che, nella posizione indicata da Piaget, si è andati sempre più verso “una progressiva svalutazione cognitiva del linguaggio” (Pontecorvo, 1983, p. 292); esso

va visto in relazione con la presa di posizione di Piaget contro ogni concezione che vede nella comunicazione sociale tramite il linguaggio l'origine del pensiero e contro ogni concezione che assimili i sistemi logici a sistemi linguistici (...) Il pensiero, insiste Piaget, non ha origine dal linguaggio (...) la “struttura” di un sistema operatorio non è struttura di un sistema di segni, ma struttura di un sistema di “azioni interiorizzate”. (Tornatore, 1974, p. 137)

Ecco allora perché Piaget assume la seguente posizione:

- l'immagine è un significante il cui scopo è di designare oggetti figurativamente;

- il concetto è un significato che ha come funzione di individuare caratteri costitutivi dell'oggetto rispetto ad altri termini della stessa classe (e non di nominarlo);
- la parola, segno verbale che designa il concetto, nulla aggiunge, quanto a conoscenza, al concetto stesso.

Ben diversa è la posizione di Vygotskij (1934/1962) che invece vede il linguaggio come mediatore tra individuo e cultura; egli asserisce che la formazione di un concetto avviene con un'operazione intellettuale “guidata dall'uso delle parole che servono per concentrare attivamente l'attenzione, astrarre certi concetti, sintetizzarli e simbolizzarli per mezzo di un segno” (Vygotskij, 1934/1990, p. 106).

L'organizzazione cognitiva del bambino riceve dunque, grazie al linguaggio, una dimensione che gli è propria, connaturata fin dal suo esordio: la dimensione *sociale*. Se è vero che il bambino impara a categorizzare nel rapporto linguistico con l'adulto, è però anche vero che forme embrionali di categorizzazione devono già essere presenti *prima* della sistemazione definitiva adulta di esse. Vygotskij stabilisce allora un confronto tra *concetti spontanei* (o quotidiani) e *concetti scientifici*:

- i primi hanno la caratteristica di essere relativi all'esperienza personale;
- i secondi fanno già parte di un sistema di concetti; la scuola ha, come effetto sulle competenze del bambino, lo scopo di dare una sistematicità ai concetti che egli già possiede e a quelli che man mano acquisisce.

Una posizione, questa, davvero rivoluzionaria, quella sulla quale si fonda gran parte della didattica odierna.

Vogliamo chiudere questa rapidissima carrellata su linguaggio e apprendimento dei concetti, ricordando, fra i tanti altri possibili, gli studi di Nelson (1974, 1977). Come abbiamo già messo in evidenza, il concetto, almeno dal punto di vista dell'apprendimento cognitivo, è interpretato oggi come qualche cosa di sempre più vasto, non più esclusivamente legato alle categorie, alle classi eccetera; concetto è, per la Nelson (1977), correlato ad un'acquisizione di conoscenza qualsiasi, purché questa sia “definita e incorporata in un contesto o in un sistema”. Dunque, indipendentemente dal grado di generalità o di astrazione, quel che conta è che ci sia un quadro di riferimento, una rete di relazioni: “i concetti necessariamente esistono all'interno di un *framework* concettuale” (Nelson, 1977, p. 223).

Diventa allora decisiva per l'apprendimento di un concetto una mappa di conoscenze riferite, per esempio, a un oggetto. L'esempio proposto dalla stessa autrice è relativo al termine “palla” in un'esperienza con un bambino di 12 mesi: la rete di relazioni che ruota attorno alla parola “palla” è relativa al luogo dove è stata vista, all'attività che altre persone fanno con essa, che il bambino stesso può fare con essa, a quali siano le caratteristiche funzionali dell'oggetto, i luoghi nei quali tutto questo può accadere eccetera. L'oggetto

quindi è legato a tutta una rete relazionale, il cui complesso finisce con il costituire il concetto; e, come si è visto, la *parola* ha un ruolo decisivo. Con il passare del tempo, il bambino aggiungerà, a questa prima formazione del concetto, altri attributi, altre funzioni eccetera, in modo che il concetto potrà contenere elementi funzionali, relazionali, descrittivi, fino al termine che lo designa, sia individualmente sia collettivamente. È anche ovvio che qui c'è un legame fortissimo con gli *script*, pensati come quadri di riferimento più ampi all'interno dei quali collocare e situare questi concetti nelle varie fasi in cui si evolvono e si presentano. Tutto ciò permette di riconoscere i tratti identificativi del concetto, in modo da poter poi riconoscere nuovi esemplari che possono con il precedente condividere il *nome*.

Ma il punto finale è quello in cui, nonostante *script* e categorie diversi, il soggetto riesce, come si usa dire, a supercategorizzare:

Sia le categorie sia gli *script* possono offrire quadri di riferimento per gli stessi concetti: infatti, non c'è ragione per cui concetti inseriti nell'uno o nell'altro contesto siano diversi nel contenuto o nella struttura. Ad esempio: gli orsi possono essere parte dello *script* relativo allo zoo o essere parte di una categoria tassonomica relativa agli animali. (Nelson, 1977, p. 223)

Si pensi a come queste riflessioni siano sotto gli occhi di tutti nell'attività di didattica della matematica, quando lo stesso concetto, introdotto in un particolare *script*, non viene accettato quando lo si ritrova in una categoria distinta (Bara, 1990, tutto l'ultimo capitolo).

Che cos'è che rende difficile la comprensione dei concetti? Qual è il livello in cui ci sono difficoltà di comprensione dei concetti?

Vi sono molteplici risposte. Intanto i diversi livelli di formazione dei concetti; studi su questo punto sono più frequenti nel mondo della didattica delle scienze naturali (Astolfi & Develay, 1989; Giordan & De Vecchi, 1987) e della storia (Clary & Genin, 1991). E poi l'esistenza di obiettivi-ostacolo (Astolfi & Develay, 1989; Meirieu, 1987). Ma questi temi esulano dal nostro percorso e non possiamo andare oltre; non possiamo che limitarci a suggerire la bibliografia appena elencata, lasciando ad altri il compito di affrontare tale tematica.

6. Attualità delle classiche definizioni di concetto e di schema date da Vergnaud

Vergnaud, in molteplici occasioni, ha affrontato la problematica di distinguere e definire le idee di concetto e di schema, termini oramai consueti negli studi di didattica della matematica (Vergnaud, 1990, pp. 133–134). Dopo aver dichiarato che la conoscenza razionale deve essere di tipo operatorio, definisce schema “l'organizzazione invariante del comportamento per una classe di situazioni date” (Vergnaud, 1990, p. 136). In particolare, molti dei suoi esempi

sono tratti dall'ambito della matematica:

- la numerazione di una piccola collezione di oggetti da parte di un bambino di 5 anni necessita dell'applicazione di uno schema che gli permette di coordinare movimenti di occhi e mani e di coordinare con essi la sequenza numerica; in particolare c'è la costante significativa di un comportamento di tipo schematico nella ripetizione dell'ultimo nome numerale, pronunciato con tono diverso;
- la risoluzione di equazioni lineari da parte di adolescenti a suo avviso segue uno schema, un'organizzazione invariante;
- l'esecuzione dell'addizione in colonna di numeri naturali segue uno schema naturale;

eccetera.

Secondo Vergnaud, se si analizza criticamente la difficoltà di allievi nella risoluzione di compiti di matematica, per esempio di bambini alle prese con problemi di aritmetica, è in termini di *schemi* che occorre analizzare la scelta dei dati da usare, la scelta delle operazioni, specie quando vi siano più possibili scelte. Anche le procedure euristiche sarebbero nient'altro che schemi (Vergnaud, 2017).

Vergnaud introduce le fortunate idee di “concetto-in-atto” e di “teorema-in-atto”; si tratta delle conoscenze contenute negli schemi: si possono pure designare con l'espressione più comprensiva di “invarianti operatori”. Secondo Vergnaud vi sono tre tipi logici di invariante operatorio:

- invarianti del tipo *proposizione*, quelli ai quali s'addice l'attribuzione di essere veri o falsi;
- invarianti del tipo *funzione proposizionale*; con questo possiamo intendere un'espressione che contiene una o più variabili individuali tali che, quando al posto di queste si mettono costanti individuali, si dà luogo a una proposizione;
- invarianti del tipo *argomento*: possono essere oggetti, relazioni, proposizioni, funzioni proposizionali, o altro: si tratta sostanzialmente di istanziazioni di variabili o esempi di funzioni proposizionali, o proposizioni stesse.

E torniamo ai concetti. Secondo Vergnaud, il punto decisivo nella concettualizzazione del reale e nella didattica è il passaggio dai *concetti-come-strumento* ai *concetti-come-oggetto* e una operazione linguistica essenziale in questa trasformazione è proprio la nominalizzazione. Ciò si potrebbe riassumere in una sola parola: *concettualizzazione*.

È allora fondamentale, irrinunciabile, anche da parte di Vergnaud, dare una sua definizione pertinente ed efficace di *concetto*; in più opere, pur con piccolissime variazioni, Vergnaud (1990, pp. 139 e segg.) ne suggerisce una che possiamo illustrare come segue.

Un *concetto* è una terna di insiemi:

$$C = (S, I, S)$$

dove:

- S è l'insieme delle situazioni che danno senso al concetto (il *referente*);
- I è l'insieme degli invarianti sui quali si basa l'operatività degli schemi (il *significato*);
- S è l'insieme delle forme linguistiche e non linguistiche che permettono di rappresentare simbolicamente il concetto, le sue procedure, le situazioni e le procedure di trattazione (il *significante*).

Secondo Vergnaud, studiare come si sviluppa e come funziona un concetto significa considerare di volta in volta questi tre “piani” separatamente e in mutua relazione reciproca.

Queste idee di Vergnaud, pur facendo parte dei primi passi che la didattica ha compiuto negli anni '80, tendono a essere “dimenticate” dagli studiosi attuali; noi qui vogliamo ribadirne la centralità, l'attualità e l'importanza.

7. La svolta “antropologica”: significato istituzionale e personale degli oggetti matematici⁷

Già a partire dagli anni '70, però, le domande sulla natura cognitiva dei concetti matematici e del significato degli oggetti matematici presero tutt'altra direzione.

Una teoria del significato è una teoria della comprensione; cioè: quello di cui una teoria del significato deve rendere conto è ciò che si conosce quando si conosce il linguaggio, cioè quando si conoscono i significati delle espressioni e dei discorsi del linguaggio. (Dummett, 1991, p. 372)

dichiarava Dummett nel 1975. Pochi anni dopo, all'inizio degli anni '80, Brousseau (1981) si chiedeva: “Quali sono le componenti del significato deducibili dal comportamento matematico che si osserva nell'allievo? Quali sono le condizioni che portano alla riproduzione di un comportamento mantenendo lo stesso significato?” (p. 131). Non sarà, per caso, che esista una “varietà didattica” del concetto di senso, specifica per la matematica, mai studiata, mai evidenziata finora, in linguistica o in psicologia? (Brousseau, 1986).

L'accentuazione del bisogno di studi sui concetti centrati sui processi di apprendimento è proposta anche da Sierpinska (1990):

Comprendere il concetto sarà (...) concepito come l'atto di acquisire il suo significato. Tale atto sarà probabilmente un atto di generalizzazione e sintesi di significati in relazione con elementi particolari della “struttura” del concetto (la “struttura” del concetto è la rete di significati degli enunciati che abbiamo considerato). Questi significati particolari devono essere acquisiti con atti di

⁷ Per la redazione di questo paragrafo ci serviamo di D'Amore (2001a).

comprensione. (...) La metodologia degli atti di comprensione si preoccupa principalmente del processo di costruire il significato dei concetti. (Sierpiska, 1990, pp. 27, 35)

Di fronte alla necessità di far luce sulla natura del significato, si è soliti fare riferimento a due categorie distinte nelle quali le teorie del significato possono essere divise: *teorie realiste* (o figurative) e *teorie pragmatiche*, divisione già apparsa in Kutschera (1979). Solo facendo chiarezza sul modo di concepire il *significato*, acquisterà senso parlare di *costruzione del significato* e dunque di *conoscenza matematica*. Descriveremo dunque brevemente la necessaria distinzione filosofica tra *teorie realiste* e *teorie pragmatiste*.⁸

Nelle *teorie realiste* il significato è “una relazione convenzionale tra segni ed entità concrete o ideali che esistono indipendentemente dai segni linguistici; di conseguenza suppongono un realismo concettuale” (Godino & Batanero, 1994, p. 329).

Come già asseriva Kutschera (1979): “Secondo questa concezione il significato di un’espressione linguistica non dipende dal suo uso in situazioni concrete, bensì avviene che l’uso si regga sul significato, essendo possibile una divisione netta fra semantica e pragmatica” (p. 29).

Nella semantica realista che ne deriva, si attribuiscono alle espressioni linguistiche funzioni puramente semantiche: il significato di un nome proprio (come: ‘Bertrand Russell’) è l’oggetto che tale nome proprio indica (in tal caso: Bertrand Russell); gli enunciati atomici (come: ‘A è un fiume’) esprimono fatti che descrivono la realtà (in tal caso: A è il nome di un fiume); i predicati binari (come: ‘A legge B’) designano attributi, quelli indicati dalla frase che li esprime (in questo caso: la persona A legge la cosa B). Dunque, ogni espressione linguistica è un attributo di certe entità: la relazione nominale che ne deriva è l’unica funzione semantica delle espressioni.

Si riconoscono qui le basi delle posizioni di Frege, di Carnap, di Wittgenstein del *Tractatus*.

Una conseguenza di questa posizione è l’ammissione di un’osservazione scientifica (all’un tempo dunque empirica e oggettiva o intersoggettiva) come potrebbe essere, a un primo livello, una logica degli enunciati e dei predicati.

Dal punto di vista che a noi qui preme di più, se andiamo ad applicare i supposti ontologici della semantica realista alla matematica, se ne trae necessariamente una visione platonica degli oggetti matematici: in essa nozioni, strutture eccetera hanno una reale esistenza che non dipende dall’essere umano, in quanto appartengono a un dominio ideale; “conoscere”, da un punto di vista matematico, significa “scoprire” enti e loro relazioni in tale dominio. Ed è pure ovvio che tale visione comporta un assolutismo della conoscenza matematica in quanto sistema di verità sicure, eterne, non

⁸ Per approfondimenti critici, storici ed epistemologici su questo tema, si vedano: Godino e Batanero (1994), D’Amore e Fandiño Pinilla (2001), D’Amore (2003).

modificabili dall'esperienza umana, dato che sono ad esse precedenti, ad essa estranee e da essa indipendenti.

Posizioni di questo tipo, seppure con diverse sfumature, furono sostenute da Frege, Russell, Cantor, Bernays, Gödel eccetera; ma trovarono anche violente critiche [il *convenzionalismo* di Wittgenstein e il *quasi empiricismo* di Lakatos: si vedano Ernest (1991) e Speranza (1997)].

Nelle *teorie pragmatiste* le espressioni linguistiche hanno significati diversi a seconda del contesto in cui si usano e quindi risulta impossibile ogni osservazione scientifica oggettiva in quanto l'unica analisi possibile è "personale" o soggettiva, comunque circostanziata e non generalizzabile. Non si può far altro che esaminarne i diversi "usi": l'insieme degli "usi" determina infatti il significato degli oggetti.

Si riconoscono qui le posizioni del Wittgenstein delle *Ricerche filosofiche*, quando ammette che la significatività di una parola dipende dalla sua funzione in un "gioco linguistico", dato che in esso ha un modo di "uso" e un fine concreto per il quale essa è stata appunto usata: la parola, dunque, non ha di per sé un significato, e tuttavia può essere contestualmente significativa (Wittgenstein, 1953, 1976). Vogliamo anche segnalare come, secondo Bloor (1982), la visione pragmatista raccoglie la "eredità di Wittgenstein".

Gli oggetti matematici sono dunque simboli di unità culturali che emergono da un sistema di utilizzazioni che caratterizzano le pragmatiche umane (o, almeno, di gruppi omogenei di individui) e che si modificano continuamente nel tempo, anche a seconda dei bisogni. Di fatto, gli oggetti matematici e il significato di tali oggetti dipendono dai problemi che in matematica si affrontano e dai processi della loro risoluzione. Insomma, dipendono dalle pratiche umane.

È ovvio che le teorie realiste e pragmatiste non sono del tutto complementari e nettamente separate, anche se, per motivi di chiarezza, abbiamo preferito dare questa impressione "forte" (Tabella 1).

Tabella 1
Teorie realiste vs teorie pragmatiste

	TEORIE “REALISTE”	TEORIE “PRAGMATISTE”
<i>Significato</i>	Relazione convenzionale tra segni ed entità concrete o ideali, indipendenti dai segni linguistici	Dipende dal contesto e dall’uso
<i>Semantica vs pragmatica</i>	Divisione netta	Non divisione o divisione sfumata
<i>Obiettività o intersoggettività</i>	Totale	Mancante o discutibile
<i>Semantica</i>	Le espressioni linguistiche hanno funzioni puramente semantiche	Le espressioni linguistiche e le parole hanno significati “personali”, sono significative in opportuni contesti, ma non hanno significati assoluti, di per sé
<i>Analisi</i>	Possibile e lecita: per esempio, la logica	Possibile solo un’analisi “personale” o soggettiva, non generalizzabile, non assoluta
<i>Consequente visione epistemologica</i>	Concezione platonica degli oggetti matematici	Concezione problematica degli oggetti matematici
<i>Conoscere</i>	Scoprire	Usare in opportuni contesti
<i>Conoscenza</i>	È un assoluto	È relativa alla circostanza e all’uso specifico
<i>Esempi</i>	Il Wittgenstein del <i>Tractatus</i> , Frege, Carnap [Russell, Cantor, Bernays, Gödel]	Il Wittgenstein delle <i>Ricerche Filosofiche</i> [Lakatos]

Nella direzione pragmatista, ha rilievo la definizione di Chevallard (1991) di “oggetto matematico”; un *oggetto matematico* è

un emergente da un sistema di prassi dove sono manipolati oggetti materiali che si scompongono in differenti registri semiotici: registro orale, delle parole o delle espressioni pronunciate; registro gestuale; dominio delle iscrizioni, ovvero ciò che si scrive o si disegna (grafici, formule, calcoli eccetera), vale a dire, registro della scrittura. (Chevallard, 1991, p. 110)

Essendo il “praxema” un oggetto materiale legato alla prassi, l’oggetto è allora

un “emergente da un sistema di praxema” (Chevallard, 1991, p. 110).

In questa accezione, non ha più molto interesse la nozione realista ingenua di *significato di un oggetto* (di conoscenza, in generale; matematico, in particolare) quanto piuttosto quella di *rapport à l'objet*, rapporto, relazione all'oggetto. Su tale idea poggia la costruzione iniziale che Chevallard fa della sua “teoria della conoscenza”, o meglio di una sua “antropologia cognitiva”, all'interno della quale si può situare la didattica.

In tutto ciò è centrale la persona (o l'istituzione, come insieme di persone) che si mette in relazione all'oggetto, e non l'oggetto in sé:

Un oggetto esiste dal momento in cui una persona X (o una istituzione I) riconosce questo oggetto come esistente (per essa). Più esattamente, si dirà che l'oggetto O esiste per X (rispettivamente per I) se esiste un oggetto, rappresentato da $R(X,O)$ (rispettivamente $R(I,O)$) e detto *relazione personale* da X ad O (rispettivamente *relazione istituzionale* da I ad O). (Chevallard, 1992, p. 76)

L'aver costretto il ricercatore a puntare tutta la sua attenzione sulle attività degli esseri umani che hanno a che fare con la matematica (non solo risolvere problemi, ma anche comunicare la matematica), è uno dei meriti del punto di vista antropologico, ispiratore di altri punti di vista, tra i quali quello che oggi si chiama antropologico: la TAD, teoria antropologica della didattica (della matematica) (Chevallard, 1999).

Il punto cruciale è che “la TAD pone l'attività *matematica*, e dunque l'attività *di studio* in matematica, *nell'insieme delle attività umane e delle istituzioni sociali*” (Chevallard, 1999, p. 221).

Questa posizione ha segnato una svolta interessante all'interno delle cornici teoriche nelle quali si situa ogni ricerca in didattica della matematica, tanto più se si sottolineano i successivi studi compiuti da più autori, per chiarire e rendere operative le nozioni di Chevallard, creando strumenti concettuali adeguati e paragonandoli a quelli messi in campo da altre posizioni al riguardo.

Per esempio, una chiarezza esemplare proviene dagli studi di Godino e Batanero (1994, 1998) perché in essi si definiscono in maniera rigorosa tutti i termini della questione: che cosa significa “pratica”, che cosa è una “pratica matematica”, una “pratica personale”, che cosa è una “istituzione”, che cosa è una “pratica istituzionale”, che differenza c'è tra oggetti personali e istituzionali e come si definisce ciascuno di essi, che cosa sono i significati di un oggetto personale e di un oggetto istituzionale, che legami ci sono tra significato e comprensione eccetera.

Per voler dare, in un colpo solo, una caratteristica di tale posizione, nella formulazione di Chevallard-Godino-Batanero l'essenziale è l'attività delle persone messe di fronte alla risoluzione di campi di problemi (fenomenologie), dalla quale emergono gli oggetti (concetti, termini, enunciati, relazioni, teorie eccetera), i quali sono relativi ai contesti istituzionali e personali. Tali contesti restano definiti secondo i campi di problemi che si hanno di fronte e gli

strumenti semiotici disponibili. Tra breve dovremo tornare su questa posizione, con esempi significativi.

Prima di procedere, vogliamo affermare che, per spiegare l'enfasi con la quale si trattano i fenomeni tipici della cognizione umana nei lavori di Godino e Batanero (1994, 1998), è bene evidenziare che, mentre nel testo di Chevallard (1992) si dà maggior peso al contesto istituzionale rispetto al personale, Godino e Batanero tendono a privilegiare la “sfera del mentale”, del singolo soggetto umano, per tentare un equilibrio tra i due contesti e per evitare che la sfera del personale sia occultata dal campo istituzionale. Il punto di vista ontosemiotico di Godino e Batanero è molto più attento alle questioni dell'apprendimento individuale, dunque a quegli aspetti psicologici che sono lasciati da parte e non presi in considerazione dal punto di vista antropologico.

Negli ultimi anni, D'Amore e Godino (2006) hanno disegnato i tratti caratteristici di due dei punti di vista usati come cornici teoriche nella ricerca in didattica della matematica, quello *antropologico* (Chevallard, 1992, 1999) e quello *ontosemiotico* (Godino, 2002; Godino & Batanero, 1994). Lo scopo è quello di evidenziare analogie e differenze tra i due punti di vista, allo scopo di preparare il terreno a nuovi sviluppi teorici che, puntualmente, arrivarono (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2017; D'Amore, Font, & Godino, 2010).

L'obiettivo di progredire nel paragonare e articolare modelli teorici, ha portato il punto di vista ontosemiotico (EOS) a formulare alcune “nozioni primitive” con un alto grado di generalità, come sono quelle di pratica matematica, istituzione, oggetto matematico, funzione semiotica e le dualità cognitivo-antropologiche (persona-istituzione, elementare-sistemico, ostensivo-non ostensivo, estensiva-intensiva, espressione-contenuto).

Questi strumenti offrono una piattaforma unificata a partire dalla quale è possibile affrontare i già ricordati compiti di paragone ed articolazione delle cornici teoriche usate in didattica della matematica. (Si vedano, ad esempio, D'Amore & Godino, 2007; D'Amore, Font, & Godino, 2007a, 2007b).

8. Evoluzione degli oggetti nella storia della matematica, come sovrapposizione o come accumulazione di concezioni provvisorie⁹

Tenteremo qui una convergenza tra:

- una posizione squisitamente *didattico-cognitiva*, a carattere fortemente ingenuo, che accolga come ipotesi di base il costruttivismo della conoscenza più elementare, posizione basata sulle concezioni acritiche più diffuse;
- una posizione *antropologica* nella quale tutto è riferito al rapporto personale all'oggetto matematico nell'ambito di una teoria

⁹ Per la redazione di questo paragrafo ci serviamo di D'Amore (2001a).

dell'apprendimento matematico che non sia caratterizzata da alcuna forma di preconetto teorico o ontologico.

Questo paragrafo 8 è solo un tentativo di prima mediazione tra le posizioni più ingenua, ma radicate nel senso comune, e quanto fin qui esposto. Per correttezza, successivamente faremo alcune considerazioni critiche.

Siano c_i le concezioni provvisorie, in un processo lineare ed evolutivo (almeno nel tempo) di assimilazione e accomodamento, relativamente a un oggetto matematico C . Occorre distinguere tra:

- c_i *scientifiche* di tipo istituzionale, indipendenti dall'apprendimento, che diremo accademiche (a), cioè quelle che la comunità scientifica (accademica) accetta come pertinenti, significative e corrette: le chiameremo c_i di tipo a ;
- c_i *cognitive* di tipo istituzionale, strettamente connesse a problematiche di tipo apprenditivo, che diremo scolastiche (s), dovute all'azione della scuola e alla noosfera, cioè quelle che una persona costruisce o ha costruito a scuola: le chiameremo c_i di tipo s .

Le c_i di tipo a si differenziano da quelle di tipo s solo perché le seconde sono necessariamente cronologicamente successive rispetto alle prime (cioè: gli indici deponenti sono di valore numerico inferiore), oppure perché sono criticamente meno ricche e più basate su sensazioni, sul buon senso, legate ad applicazioni, meno soggette a ripensamento e riflessione critica, più legate a varie clausole del contratto didattico (D'Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani, & Sarrazy, 2010).

Il senso del processo didattico usuale, nella sua forma più ingenua, ma anche più diffusa, è di portare alla fine gli individui alla formazione di un oggetto C che sia il culmine del processo evolutivo, *il concetto*, *l'oggetto*, supposto esistente, di tipo a (o, per lo meno, il più vicino possibile a esso).

Siccome però ogni concezione è in evoluzione storico-critica *perenne*, è impossibile valutare il raggiungimento di questo limite, soprattutto perché si potrà al più parlare di "oggetto acquisito dalla comunità scientifica fino a ora" e non porsi nella situazione di dover prevedere il futuro di quell'oggetto.

L'"oggetto" è quindi, in questa concezione, qualche cosa di ideale, di astratto, punto culminante di un processo perennemente in atto, del quale abbiamo solo un'idea limitata all'evoluzione storica e allo stato attuale.

La formazione di C a partire dalla successione c_i può essere pensata secondo due modalità:

- *superposizione*: ogni concezione provvisoria c_{m+1} aggiunge e integra la precedente c_m , cioè la comprende e le aggiunge qualcosa, sovrapponendosi ad essa (Figura 1);
- *accumulazione*: ogni concezione provvisoria c_{m+1} aggiunge qualcosa (in più) alla c_m precedente (Figura 2).

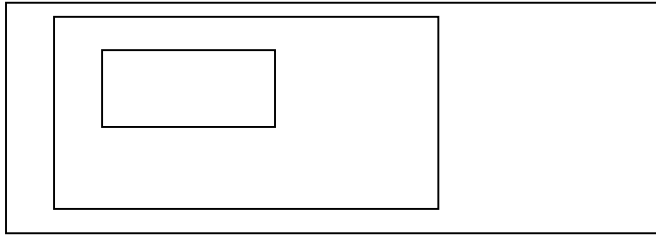


Figura 1. Superposizione di concetti.

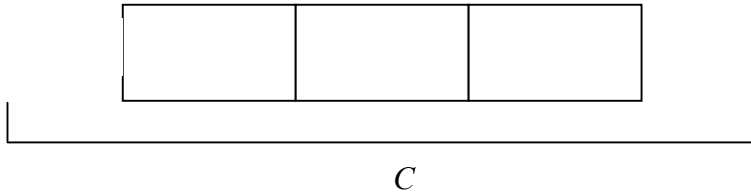


Figura 2. Accumulazione di concetti.

In realtà, si hanno spesso (sempre?) miscugli delle due modalità.

Esempio 1: *retta*.

Delineiamo, in maniera approssimativa, una successione di concezioni provvisorie relativamente a un supposto oggetto *retta*. Se si considera l'evoluzione dell'idea concettuale di “retta” nella storia della matematica, si potrebbe pensare a una successione siffatta:

- c_1 : retta primitiva: segmento di varie possibili lunghezze (le sue caratteristiche sono: l'esser dritto e sottile, e la sua indipendenza nominale dalla lunghezza); questa è anche l'idea ingenua di un bambino.
- c_2 : retta euclidea: idealizzazione di c_1 [le sue caratteristiche sono: l'aver una sola dimensione (che è l'idealizzazione del “sottile”) e l'essere allungabile (che è l'idealizzazione dell'indipendenza del nome dalla lunghezza)]; non molto chiara è la relazione tra punti e retta; nel senso pitagorico, il modello è quello delle perline (monadi) infilate nella collana (retta); ma in Euclide non c'è già più questa posizione ingenua che invece permane nello studente fino a 10–12 anni e talvolta oltre (Arrigo, D'Amore, & Sbaragli, 2010).
- c_3 : retta densa: idealizzazione di c_2 : tra due punti distinti qualsiasi ce n'è *sempre* un altro: il modello pitagorico è superato.
- c_4 : retta continua (già ai tempi di Newton e Leibniz): sulla retta ci sono opportune sedi per punti corrispondenti a valori irrazionali algebrici ($\sqrt{2}$) e trascendenti (π) anche se non è ancora ben chiaro il loro statuto

epistemologico.

- c_5 : retta di Hilbert (definita implicitamente dagli assiomi): non c'è più il tentativo di definizione esplicita per cercare di adeguare l'immagine di retta a un modello pre-fissato che si vuol raggiungere, ma si ha un'idealizzazione pura della concezione all'interno di un sistema teorico.
- c_6 : retta come nome comune utilizzato indifferentemente in ambito euclideo e non: non si parla più di dimensione, di essere diritta, di essere infinita (però resta specificata la sua illimitatezza).
- c_7 : denominazione di retta data a enti diversi di modelli diversi (retta finita o infinita, discreta, densa o continua, limitata o illimitata ...).
- c_8 : particolare oggetto $(n-2)$ -dimensionale in una varietà n -dimensionale.
- ...

Come si può decidere se e quali ulteriori c_i seguiranno? L'oggetto C "retta" è talvolta sovrapposizione e talaltra accumulazione delle concezioni precedenti; sembra che da c_1 a c_5 si possa parlare prevalentemente di passaggi di tipo "sovrapposizione", mentre da c_6 a c_8 sembra di essere di fronte prevalentemente a passaggi di tipo "accumulazione".

Esempio 2: *addizione*.

Delineiamo, in maniera approssimativa, una successione di concezioni provvisorie relativamente al supposto oggetto *addizione*. Consideriamo l'evoluzione del concetto di addizione nel corso della storia della matematica; si potrebbe pensare a una successione siffatta:

- c_1 : addizione pitagorica (ordinale e cardinale confusi insieme) in $\mathbb{N}-\{0\}$; l'addizione come cardinale di raccolte disgiunte; è la concezione ingenua di un bambino piccolo (è su questo punto che Vergnaud spiega alcuni dei suoi *teoremi in atto*).
- c_2 : addizione in \mathbb{Q}_a ; stiamo pensando alle addizioni tra frazioni, nella storia sumera, egizia e poi greca.
- c_3 : addizione in \mathbb{N} e in \mathbb{Q}_a (0 compreso); nel corso del Medioevo, nel mondo indiano-arabo si rende necessario ampliare l'addizione a casi nei quali un addendo è lo zero.
- c_4 : addizione in \mathbb{Z} .
- c_5 : addizione in \mathbb{Q} .
- c_6 : addizione in \mathbb{R} .
- c_7 : addizione nel campo complesso \mathbb{C} .
- c_8 : addizione nei quaternioni e, più in generale, nei sistemi complessi n -valenti; stiamo pensando alle ricerche di Hamilton, Grassmann, Frobenius e Hankel; alcune proprietà formali dell'addizione tipiche dei numeri \mathbb{N} , \mathbb{Z} ,

Q e R si perdono, e tuttavia l'operazione che estende e generalizza l'addizione è ancora chiamata così.

- c_9 : addizione generalizzata nei reticoli e nelle algebre di Boole.
- c_{10} : addizione generalizzata nelle strutture $\langle A, +, \times, 0, 1, \dots \rangle$.
- ...

Come si può decidere se e quali ulteriori c_i seguiranno? L'oggetto matematico che denominiamo "addizione" è evoluto talvolta per sovrapposizione e talaltra per accumulazione delle concezioni precedenti; sembra che da c_1 a c_7 si possa parlare di passaggi prevalentemente di tipo "sovrapposizione", mentre da c_8 a c_{10} sembra di essere di fronte a passaggi prevalentemente di tipo "accumulazione".

9. Alcune note critiche alla precedente posizione; oggetto, significato dell'oggetto, linguaggi

La visione delineata nel paragrafo 8, come ripetiamo, è solo uno schema che riassume le posizioni più diffuse, al riguardo. Vediamo ora alcune note critiche.

Una riflessione matura mostra che è essenziale l'attività delle singole persone messe di fronte alle problematiche che fanno scaturire dei c_i ; in questo senso, una supposta scala gerarchica perde, a nostro avviso, di senso; per cui una maggior ... nobiltà concettuale supposta per le c_i di tipo a , rispetto a quelle di tipo s , svanisce.¹⁰

Gli "oggetti" emergono dall'attività delle persone messe di fronte alla risoluzione di problemi, addirittura indipendentemente da ogni contesto istituzionale; anzi, in un certo senso, privilegiando proprio i significati personali rispetto a quelli istituzionali. Tanto è vero che la cadenza di successioni precedenti potrebbero essere sì idonee a spiegare l'evoluzione all'interno della storia della matematica, ma non quella evolutiva specifica di una persona che apprende.

Da questo punto di vista, non sembra aver senso parlare, per esempio, dell'"oggetto retta" (o dell'"idea di retta", o del "concetto di retta") come normalmente si fa: siamo evidentemente piuttosto costretti a parlare di "pluralità di oggetti"; non tanto dunque si tratta di una "scalata" verso un vertice, quanto di una pluralità di "oggetti" *diversi*, che hanno banalmente in comune un nome proprio, il quale però non identifica una sola entità, come nella visione che abbiamo chiamato "teoria realista", bensì il cui significato

¹⁰ Questo punto, se accettato, potrebbe avere forti ripercussioni nella pratica didattica; e, a nostro avviso, dovrebbe essere studiato non solo dal punto di vista teorico, com'è stato fatto fino a ora, nell'ambito della cosiddetta educazione matematica, ma anche dal punto di vista dell'azione pratica, nell'ambito della cosiddetta didattica della matematica (Godino & Batanero, 1998).

dipende dal conteso di uso, nella visione che abbiamo chiamato “teoria pragmatista”.

Dunque, ogni c_i è, in questa ultima visione, un “oggetto retta” (probabilmente, a una più accurata analisi, si potrebbe scoprire che, in realtà, esso stesso è, a sua volta, una pluralità eccetera).

Ogni c_i è il risultato di un rapporto personale all’oggetto, ma, come abbiamo visto in Chevallard e da Godino e Batanero, *l’oggetto è questo stesso rapporto personale*, non un supposto “oggetto in sé”.

D’altra parte, lo stesso Wittgenstein insiste sul fatto che non si deve parlare di idee matematiche nel senso in cui, invece, si è soliti farlo, cioè come del risultato di un processo di astrazione, dato che questo è origine di gravi confusioni filosofiche, psicologiche (e didattiche). Il Wittgenstein delle *Ricerche Filosofiche* insiste nel parlare di diversità di uso, o di usi diversi del “termine” (“retta”, “addizione”, nei nostri esempi precedenti).

Nella posizione di Godino e Batanero, all’oggetto matematico O si propone di associare l’entità teorica “significato di O ” (in realtà una classe di significati): si passa così dall’accentuazione posta sul “concetto”, sulle sue definizioni e sulle regole d’uso, a una nuova accentuazione posta invece sui campi di problemi, di pratiche, di tecniche, dalle quali emergono queste entità intensionali.

I due casi da noi forniti, “retta” e “addizione”, dunque, costituiscono proprio un esempio della relatività degli oggetti O che, a volte sono entità mentali (dunque personali, in quanto strettamente relazionate con l’individuo), a volte entità astratte (dunque istituzionali in quanto connesse ad una forma generale di interpretarle e di considerarle).

Ci pare di poter affermare che negli studi teorici di educazione matematica, nella ricerca in questo settore, nella pratica didattica, sia di fondamentale importanza identificare quali siano i problemi specifici, le attività pratiche, le attività tecniche, le relazioni fra i tre poli del triangolo della didattica (docente, allievo, Sapere) eccetera che, anche storicamente, hanno portato a far emergere ogni “concezione”, ogni “oggetto”, ogni “regola”.

Ci piace evidenziare la somma importanza di stabilire la reale o presunta dipendenza di tutte queste componenti dai contesti cosiddetti istituzionali (Godino & Batanero, 1994); potrebbero essere dipendenze di carattere storico, educativo, strumentale eccetera, o tutte queste allo stesso tempo.

10. Concetti e oggetti¹¹

In matematica, l’acquisizione concettuale di un oggetto passa necessariamente attraverso l’acquisizione di una o più rappresentazioni semiotiche. Lo dice per primo Raymond Duval, presentando la problematica dei registri, nei celebri

¹¹ Per la redazione di questo paragrafo ci siamo serviti di D’Amore (2001c).

articoli del 1988 pubblicati sugli *Annales* (1988a, 1988b, 1988c) e del 1993 (Duval, 1993) che è una sintesi dei precedenti; ma Duval pubblica su questo argomento anche lavori nel 1989 e 1990; lo confermano Chevallard (1991), Godino e Batanero (1994). Per analisi assai più recenti si vedano Duval e Sáenz-Ludlow (2016) e D'Amore (2016). Questi studi ci consentono di fare alcune precisazioni terminologiche, considerazioni complementari e note cautelative.

10.1. A volte, in matematica, si parla di “concetti” a volte di “oggetti”. Che differenza c'è? Potrebbe essere il risultato di un vezzo dei matematici, ma si tratta invece di un motivo ben fondato, dato che si basa sui seguenti tre punti:

- Ogni concetto matematico ha rinvii a “non-oggetti”, dal punto di vista del realismo ingenuo; dunque la concettualizzazione non è e non può essere basata su significati che poggiano sulla realtà concreta dato che, in matematica, non sono possibili rinvii ostensivi.
- Ogni concetto matematico è costretto a servirsi di rappresentazioni, dato che non vi sono “oggetti” da esibire in loro vece o a loro evocazione;¹² dunque la concettualizzazione deve necessariamente passare attraverso registri rappresentativi che, per vari motivi, soprattutto se sono a carattere linguistico, non possono essere univoci: dunque, in matematica, non c'è accesso sensibile (vista, tatto, eccetera) diretto agli “oggetti” ma solo a loro rappresentazioni semiotiche in diversi registri linguistici; in questi casi, si fa spesso riferimento al “realismo ingenuo”.¹³
- Si parla più spesso in matematica di “oggetti matematici” che non di concetti matematici in quanto in matematica si studiano *preferibilmente* oggetti piuttosto che concetti: “la nozione di oggetto è una nozione che non si può non utilizzare dal momento in cui ci si interroga sulla natura, sulle condizioni di validità o sul valore della conoscenza” (Duval, 1998, p. 141).

¹² Qui “oggetto” è ingenuamente inteso nel senso di “oggetto reale” o di “cosa”. Quale sia il significato di questa parola (“cosa”) è espresso nella *Metafisica* di Aristotele, quando afferma che la “cosa”, in quanto parte del reale, è ciò che presenta le tre caratteristiche seguenti: tridimensionalità; accessibilità sensoriale multipla (cioè di più sensi contemporaneamente) indipendente dalle rappresentazioni semiotiche; possibilità di separazione materiale e da altre parti della realtà, da altre “cose”.

¹³ “Realismo ingenuo” non è un termine “ingenuo” o di buon senso, ma si riferisce al *Naïven Realismus* così definito da Wilhelm Schuppe (1836 – 1913) (*Grundriss der Erkenntnistheorie und Logik*, 1894), cioè quello per cui si riconosce l'indipendenza dell'oggetto conosciuto dall'atto (psichico) attraverso il quale viene conosciuto. Questa idea ha riscontro in un famoso articolo di George Edward Moore (1873 – 1958) del 1903 (pubblicato in *Mind*, con il titolo: *La confutazione dell'idealismo*) che si ispira alla posizione di sir William Hamilton (1730 – 1803) (che però parla di *Realismo Naturale*) il quale attribuisce questo modo di pensare alla filosofia scozzese. Crediamo però che tutte queste posizioni possano rientrare nel Realismo empirico di Immanuel Kant (1724 – 1804).

10.2. Nel sentiero tracciato da Duval, la nozione di concetto, preliminare o comunque prioritaria in quasi tutti gli autori, diventa secondaria, mentre ciò che assume carattere di priorità è la coppia (*segno, oggetto*), il che porta al cosiddetto *paradosso cognitivo del pensiero matematico*, evidenziato proprio da Duval (1993) e che presenteremo tra breve. In Duval (1996) si cita un passo di Vygotskij nel quale sostanzialmente si dichiara che non c'è concetto senza segno:

Tutte le funzioni psichiche superiori sono unite da una caratteristica comune superiore, quella di essere dei processi mediati, cioè di includere nella loro struttura, come parte centrale ed essenziale del processo nel suo insieme, l'impiego del segno come mezzo fondamentale di orientamento e di dominio dei processi psichici (...) L'elemento centrale [del processo di formazione dei concetti] è l'uso funzionale del segno, o della parola, come mezzo che permette all'adolescente di sottomettere al suo potere le proprie operazioni psichiche, di dominare il corso dei propri processi psichici (...) (Vygotskij, 1934/1985, pp. 150–151, 157)

Se si pone l'accento sulla coppia (*segno, oggetto*), tutte le rappresentazioni triadiche (di C. S. Peirce, di G. Frege, di C. K. Ogden e I. A. Richards) possono essere tra loro unificate e le diversità sembrano svanire.¹⁴ Nel “segno” confluiscono tutte le rappresentazioni iconiche e semiotiche che costituiscono un complesso e non più un unicum, il che permette una descrizione in tutte le direzioni segniche possibili.

10.3. Riassumiamo parte di quanto già detto, interpretando Duval (1993), nel seguente schema:

- l'“oggetto” matematico da concettualizzare non esiste come oggetto reale;
- cioè presenta una oggettiva inaccessibilità alla percezione sensoriale;
- ne segue la necessità di far uso di rappresentazioni semiotiche;
- l'attività matematica dunque non avviene sugli oggetti ma sulle rappresentazioni;
- il che comporta il cosiddetto *paradosso cognitivo del pensiero matematico*. Vediamo allora in che cosa consiste questo *paradosso cognitivo del pensiero matematico*, che ha forti ripercussioni cognitive:

(...) da una parte, l'apprendimento degli oggetti matematici non può che essere un apprendimento concettuale e, d'altra parte, è solo per mezzo di rappresentazioni semiotiche che è possibile un'attività su degli oggetti matematici. Questo paradosso può costituire un vero circolo vizioso per l'apprendimento. Come dei soggetti in fase di apprendimento potrebbero non confondere gli oggetti matematici con le loro rappresentazioni semiotiche se essi non possono che avere relazione con le sole rappresentazioni semiotiche? L'impossibilità di un accesso diretto agli oggetti matematici, al di fuori di ogni

¹⁴ Si veda D'Amore (2001c) per una trattazione più completa.

rappresentazione semiotica, rende la confusione quasi inevitabile. E, al contrario, come possono essi acquisire la padronanza dei trattamenti matematici, necessariamente legati alle rappresentazioni semiotiche, se non hanno già un apprendimento concettuale degli oggetti rappresentati? Questo paradosso è ancora più forte se si identifica attività matematica ed attività concettuale e se si considera le rappresentazioni semiotiche come secondarie o estrinseche. (Duval, 1993, p. 38; la traduzione è di B. D'Amore, concordata con l'autore)¹⁵

In questo paradosso, così ben evidenziato da Duval, si può nascondere una potenziale causa di mancate devoluzioni, come prova D'Amore (2001c). Il problema principale, per dirla qui brevemente, sta nel fatto che secondo l'insegnante, secondo la noosfera e secondo lo stesso studente, egli (studente) sta entrando in contatto con un "oggetto" matematico ma, di fatto, e nessuno talvolta sembra rendersene conto, lo studente sta entrando a contatto solo con una rappresentazione semiotica particolare di quell'"oggetto". Lo studente non ha, non può avere, accesso diretto all'"oggetto" e l'insegnante e la noosfera tendono a non separare oggetto e sua rappresentazione (l'insegnante cioè potrebbe confondere noetica e semiotica, e dunque nemmeno darsi conto del motivo delle difficoltà dello studente). Lo studente è come bloccato, cognitivamente inibito, distante dalla comprensione e dall'uso dell'oggetto: non può far null'altro che confondere "oggetto" e sua rappresentazione semiotica perché non se ne rende conto, non lo sa. Il suo rapporto personale al sapere ha come "oggetto" qualche cosa di sfumato, di confuso, di limitato, riduttivo. E quindi, di fronte a un successivo bisogno concettuale, che si manifesta per esempio con la necessità di modificare la rappresentazione semiotica di quello stesso "oggetto", per dominare una situazione diversa, per esprimere altre componenti concettuali, lo studente non ha mezzi critici né culturali né cognitivi; l'insegnante e la noosfera non capiscono il perché e accusano lo studente, colpevolizzandolo di qualche cosa che egli nemmeno comprende, lo accusano di una incapacità vaga, non circostanziata e dettagliata: nessuno sa *esattamente* che cosa, davvero, lo studente non sa o non sa fare.

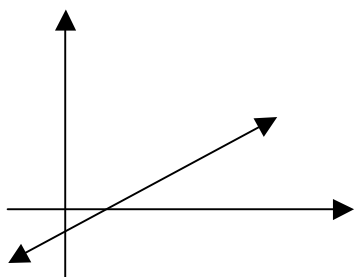
In questa fase paradossale, nessuno capisce più quel che sta accadendo in quanto ciascuno degli attori di questa avventura ha una percezione diversa del problema.

D'altra parte, l'analisi delle rappresentazioni è fatto nuovo, nello studio dei processi cognitivi, anche se lo è meno sul piano strettamente filosofico.

Si pensi al passaggio dal registro figurale a quello algebrico nella geometria analitica (Figura 3).

¹⁵ Un'analisi storico-semiotico-filosofica di questo paradosso è stata recentemente pubblicata; si veda D'Amore, Fandino Pinilla, Iori e Matteuzzi (2015).

Da:



a:

$$x-2y-2=0$$

Figura 3. Passaggio dal registro figurale a quello algebrico nella geometria analitica.

c'è un cambio di registro non banale da dominare per un allievo di 14–15 anni. In nessuno dei due casi si è di fronte all'“oggetto retta”, ma ad una sua rappresentazione semiotica.

Come altro esempio, si pensi al passaggio dal registro decimale a quello figurale nella rappresentazione dei numeri: molti studenti di 11–12 anni trovano complesso rappresentare numeri decimali come 1,75 oppure come 1,8 sulla retta numerica razionale per il cambio di registro semiotico che non dominano; in un certo senso è questo cambio di registro che fa dire a qualcuno che $1,75 > 1,8$ (e infatti: $75 > 8$; qui si aggiunge anche un'interpretazione ambigua della scrittura decimale).

Più volte abbiamo usato il verbo “apprendere”, difficile da definire, ma che riteniamo necessario almeno chiarire parzialmente.

Intenderemo con “apprendere” una costruzione più o meno personale, ma sottoposta al bisogno di “socializzare”, il che avviene ovviamente grazie a un mezzo comunicativo (che può essere il linguaggio) e che nella matematica sempre più decisamente sarà condizionato dalla scelta del mediatore simbolico, cioè del registro semiotico di rappresentazione prescelto (o imposto, a vario titolo, anche solo dalle circostanze).

11. Semiotica e noetica nell'apprendimento della matematica

Prendiamo a prestito da Duval l'affermazione: *non c'è noetica senza semiotica*.

Tanto per chiarezza terminologica, ma senza alcuna pretesa di completezza, dato che non sempre questi termini sono usati nello stesso senso, preferiamo esplicitarne i significati dei quali ci serviremo:

semiotica =_{df} rappresentazione realizzata per mezzo di segni

noetica =_{df} acquisizione concettuale di un oggetto.¹⁶

Indicheremo, d'ora in poi:

¹⁶ Per Platone, la noetica è l'atto di concepire attraverso il pensiero; per Aristotele, l'atto stesso di comprensione concettuale.

$r^m =_{\text{df}}$ registro semiotico ($m = 1, 2, 3, \dots$)
 $R^m_i(A) =_{\text{df}}$ rappresentazione semiotica i -esima ($i = 1, 2, 3, \dots$) di un oggetto A nel registro semiotico r^m .

Si può notare che, in base a queste scelte, se cambia il registro semiotico cambia necessariamente anche la rappresentazione semiotica, mentre non è detto il viceversa; cioè può cambiare la rappresentazione semiotica pur mantenendosi lo stesso registro semiotico.

Ancora una volta, usiamo un altro schema per illustrare tutta la questione, perché ci sembra più incisivo ed efficace.¹⁷

- Consideriamo le tre caratteristiche della semiotica: *rappresentazione*, *trattamento* e *conversione* (che sono tre attività assai diverse fra loro dal punto di vista cognitivo).
- Abbiamo un oggetto matematico A da *rappresentare*.
- Poiché non esiste un'unica rappresentazione in grado di fornire in un unico simbolo o segno tutte le componenti o tratti distintivi di A , il primo passo da compiere è decidere quali tratti distintivi vogliamo rappresentare e in quale registro semiotico farlo.
- Scegliamo il registro semiotico r^m e, in esso, la rappresentazione $R^m_i(A)$ di A .
- Grazie alla trasformazione di trattamento, possiamo passare alla rappresentazione $R^m_j(A)$ di A ($i \neq j$).
- Grazie alla trasformazione di conversione, possiamo passare alla rappresentazione $R^n_h(A)$ di A ($h \neq i, n \neq m$) ($m, n, i, h = 1, 2, 3, \dots$).

Nella didattica della matematica, la conversione sembra occupare un posto centrale rispetto alle altre funzioni, e in particolare rispetto a quella di trattamento, considerata invece dai più come decisiva dal punto di vista matematico. (Su questo punto si vedano: D'Amore, 2007b, 2007c, 2011; D'Amore & Fandiño Pinilla, 2007a, 2007b; Rojas Garzón, 2014; Santi, 2010, 2011).

La costruzione dei concetti matematici è strettamente dipendente dalla capacità di usare *più* registri di rappresentazioni semiotiche degli stessi concetti:

- di *rappresentarli* in un dato registro;
- di *trattare* tali rappresentazioni all'interno di uno stesso registro;
- di *convertire* tali rappresentazioni da un dato registro ad un altro.

L'insieme di questi tre elementi e le considerazioni precedenti mettono in evidenza il profondo legame che c'è tra noetica e costruttivismo, in quanto la “costruzione della conoscenza in matematica” può essere interpretata come l'unione di quelle tre “azioni” sui concetti, cioè l'espressione stessa della

¹⁷ Facciamo ancora riferimento a Duval (1993).

capacità di:

- *rappresentare* gli oggetti matematici scegliendo i tratti distintivi che li caratterizzano o che si vogliono evidenziare;
- *trattare* le rappresentazioni ottenute all'interno di un registro stabilito; e
- *convertire* le rappresentazioni da un registro ad un altro.

È come se si stessero specificando le operazioni-base che, nel loro insieme, definiscono quella “costruzione” che, altrimenti, resta un termine misterioso ed ambiguo, disponibile ad ogni sorta di interpretazione, anche metafisica.¹⁸

La rinuncia dello studente alla devoluzione (ovviamente inconsapevole), l'incapacità dello studente di implicarsi (come risultato di esiti negativi nei casi di tentativi), assumendosi carico diretto e personale della responsabilità della costruzione della conoscenza, in ambiente scuola, sono legate all'incapacità (talvolta solo supposta) o di *rappresentare*, o di *trattare* o di *convertire*, a causa di una mancanza didattica specifica a monte. L'insegnante potrebbe infatti non preoccuparsi dei singoli componenti della costruzione a causa del fatto che egli considera identiche la semiotica e la noetica, il che spiega anche la difficoltà che ha l'insegnante di capire la difficoltà nella quale versa lo studente in difficoltà. Questa identità è molto diffusa nel pensiero di alcuni insegnanti, specie di quelli che non hanno mai avuto occasione di riflettere su questa questione, o che la considerano superflua.¹⁹

Ciò potrebbe portare alla scelta rinunciataria da parte dello studente e quindi alla scolarizzazione dei saperi (D'Amore, 1999b).²⁰

A tutto quanto sopra bisogna aggiungere, secondo noi, un'altra questione.

Tra i registri semiotici disponibili per la matematica c'è il linguaggio comune, l'*everyday language*. Il linguaggio, per come lo ha conosciuto lo studente nei primi anni di scuola e per come lo usa in contesti non scolastici, ha varie e complesse funzioni:

¹⁸ Naturalmente questa osservazione, ma anche tutto questo articolo, sono specifici per la matematica; non sappiamo valutare quanto siano estendibili a una teoria dei concetti o, addirittura, a una gnoseologia.

¹⁹ Il che rimanda a un discorso assai più generale, quello sulle credenze implicite dell'insegnante, affrontato in modo profondo, sistematico e ricorrente, in Speranza (1997).

²⁰ “Con il termine ‘scolarizzazione del sapere’ intendiamo qui riferirci a quell'atto in larga misura inconsapevole, attraverso il quale l'allievo, a un certo punto della sua vita sociale e scolastica (ma quasi sempre nel corso della scuola elementare), delega alla Scuola (come istituzione) e all'insegnante di scuola (come rappresentante dell'istituzione) il compito di *selezionare per lui i saperi significativi* (quelli che lo sono socialmente, per status riconosciuto e legittimato della noosfera), rinunciando a farsi carico diretto della loro scelta in base a qualsiasi forma di criterio personale (gusto, interesse, motivazione eccetera). Poiché questa scolarizzazione comporta il riconoscimento dell'insegnante come depositario dei saperi che socialmente contano, è anche ovvio che vi è, più o meno contemporaneamente, una scolarizzazione dei rapporti interpersonali (tra studente e insegnante e tra studente e compagni) e del rapporto tra lo studente e il sapere: è quel che (...) si chiama ‘scolarizzazione delle relazioni’” (D'Amore, 1999b, p. 251).

- funzione di designazione,
- funzione di espressione di enunciati,
- funzione di espansione discorsiva,
- funzione di riflessività (o metalinguistica).


Tutte queste funzioni sono presenti nel complesso gioco relazionale che riguarda l'apprendimento della matematica, ma il più delle volte in modo non spontaneo, dato che lo studente adatta il proprio linguaggio matematico a quello che sente usare dall'insegnante, dal libro di testo, dai compagni che hanno successo nelle ore di matematica.

Dunque, si realizza questo paradosso: proprio l'uso di quel registro semiotico che dovrebbe essere il più naturale e spontaneo si rivela essere quello più complesso da gestire.

Il linguaggio “naturale” cessa di essere tale e diventa un registro specifico che sfugge alla capacità dello studente di gestirlo e di dominarlo. Lo studente finisce con il parlare una lingua innaturale, fatta di frasi fatte, sentite e non costruite, che non domina più (D'Amore & Sandri, 1996; Maier, 1993).

Innumerevoli sono gli studi sulle relazioni fra semiotica e pratica d'aula; noi ci limitiamo a segnalare solo quelli che ci sembrano più pertinenti e generali e più vicini al nostro modo di vedere: Radford e D'Amore (2006, 2017), D'Amore, Fandiño Pinilla e Iori (2013), Duval e Sáenz-Ludlow (2016).

Su un punto occorre tornare.

In più suoi scritti, Raymond Duval insiste sulla centralità della trasformazione semiotica di conversione, nei processi di rappresentazione e apprendimento della matematica, sottolineando come questa trasformazione crei ostacoli all'apprendimento. Ma la pratica scolare mostra che la questione non è così immediata. Per esempio, qualsiasi bambino di 8 anni è in grado di passare da una rappresentazione aritmetica dell'oggetto matematico “un mezzo” ($1/2$) a una rappresentazione geometrica (), mediante una conversione. Mentre quasi nessuno studente adulto accetta che $3n$ sia la somma di tre numeri naturali consecutivi, nonostante abbia egli stesso effettuato il trattamento: $(n-1)+n+(n+1)=3n$. È come se il trattamento sia accettato come trasformazione, ma non si accetta che possa conservare il significato dell'oggetto matematico trattato. Questo punto che consideriamo centrale nell'attuale ricerca in didattica della matematica è stato a lungo studiato e in varie accezioni. (Si vedano, per esempio: D'Amore, 2007b, 2007c; D'Amore & Fandiño Pinilla, 2007a, 2007b, 2008a, 2008b; Rojas Garzón, 2014; Santi, 2010, 2011).

Per concludere questo paragrafo, raccomandiamo al lettore interessato alla prospettiva duvaliana i due lavori di Maura Iori (2015, 2017).

12. Un cenno alla teoria della oggettivazione

Rispetto alle posizioni delle origini, poi, gli studi semiotici si sono moltiplicati e hanno preso strade assai variegata. Fra tutte le posizioni emerse, di certo affascinante e ricca di suggestioni si è rivelata la teoria della oggettivazione studiata con molta profondità da Luis Radford. Essa evidenzia una dualità fra le teorie semiotico-cognitive (alla Duval) e le teorie semiotico-culturali.

La teoria della oggettivazione rientra appunto fra le teorie cosiddette semiotico-culturali; in generale, in esse si suppone che la conoscenza sia generata dagli individui nel corso di pratiche sociali costruite storicamente e culturalmente. La produzione di conoscenza dipende dunque da esigenze di adattamento sociale, in quanto essa è incorporata in forme culturali di pensiero, relazionate con una realtà simbolica e materiale che offre le basi per interpretare, comprendere e trasformare il mondo degli individui, i concetti e le idee che essi si formano a proposito di detta realtà. L'apprendimento è la realizzazione di una conoscenza culturalmente oggettiva che gli studenti ottengono attraverso un processo sociale di oggettivazione mediato per mezzo di segni, linguaggi, artefatti e interazioni sociali, quando gli studenti si impegnano in forme culturali di riflessione e di azione.

Rispetto ai paradigmi precedenti, quello delle teorie socioculturali è una vera e propria rottura; si tratta infatti di interpretare in forma decisamente nuova le idee di conoscenza e sapere. Secondo le teorie socioculturali, il concetto di adattamento come forma di apprendimento non è sufficiente per intendere nel profondo l'idea di produzione di conoscenza o di appropriazione di conoscenza (l'apprendimento). Secondo queste teorie la conoscenza non è il risultato di strutture di carattere epistemico che trascendono la cultura, ma è essa stessa una forma culturale, costituita da riflessioni e azioni incorporate nelle stesse pratiche sociali, con la mediazione del linguaggio, dovuta all'interazione sociale, grazie all'uso di segni e alla creazione di opportuni artefatti (Radford, 2011).

La teoria dell'oggettivazione, in particolare, si basa sull'idea considerata fondamentale che l'apprendimento è allo stesso tempo conoscere e divenire, cioè non può essere circoscritto al solo ambito della conoscenza ma deve affrontare l'ambito dell'essere, quello specifico dei soggetti. Lo scopo dell'educazione matematica è uno sforzo dinamico, politico, sociale, storico che spinge i soggetti riflessivi ed etici alla creazione dialettica relativamente a discorsi tematici e pratiche di carattere matematico che si costituiscono storicamente e culturalmente, discorsi e pratiche che sono in continua evoluzione. Le basi filosofiche di questa posizione possono essere rintracciate nei lavori del filosofo tedesco Georg Wilhelm Friedrich Hegel e nei successivi sviluppi dovuti a Karl Marx e a tutta la tradizione cosiddetta dialettica, Evald Ilyenkov, Boris Mikhailov, Lev Semënovič Vygotskij, per esempio. (Si vedano: D'Amore, 2015, 2017, in corso di stampa; D'Amore & Radford, 2017; Radford, 2003, 2005a, 2005b, 2006a, 2006b, 2011).

La teoria della oggettivazione, come abbiamo detto, si contrappone a precedenti teorie, per esempio alla teoria delle situazioni (Brousseau, 1986, 1997). (Si vedano, per esempio: D'Amore, Radford, & Bagni, 2006; Radford, 2017). Su questo punto sorvoliamo, anche se, in più occasioni, abbiamo insistito al contrario sulla possibilità di comparazione fra queste due teorie, in luogo della loro opposizione (Prediger, Bikner-Ahsbals, & Arzarello, 2008; Radford, 2008a, 2008b); ne abbiamo fatto cenno in vari studi e ci ripromettiamo di entrare più a fondo in forma costruttiva in un immediato futuro, in occasione di un articolo specifico. Più in generale, noi siamo assai più propensi a trovare analogie e comparazioni positive fra teorie che non opposizioni inconciliabili.

13. Il contributo della sociologia all'analisi comparata di alcuni strumenti elaborati dalla didattica della matematica

Il momento in cui si incontrano insegnante e allievo in un determinato ambiente, per discutere intorno a un sapere da costruire e relativo a ciò che, attraverso determinate scelte, è stato stabilito dall'istituzione, dall'insegnante, dalla noosfera e intorno a un sapere che fa parte del mondo esterno alla scuola, si caratterizza per le relazioni interpersonali che si instaurano.

Lo studio dei fenomeni di carattere sociale che avvengono nei processi di insegnamento e apprendimento della matematica costituisce una linea di ricerca di crescente sviluppo in educazione matematica. Si integrano in questo modo le ricerche di carattere cognitivo che centrano la loro attenzione principalmente nell'apprendimento del soggetto individuale.

Lo studio delle funzioni legate alle interazioni sociali nella classe e della loro dipendenza da altri fattori esterni (culturali, politici eccetera) è stato affrontato da diverse impostazioni e usando strumentazioni teoriche differenti (si vedano: Bagni & D'Amore, 2005; D'Amore, Font, & Godino, 2008).

In particolare, accanto a un'analisi delle norme sociali che regolano in generale le interazioni tra insegnante e allievi (Godino & Llinares, 2000; Lerman, 2000; Sierpiska & Lerman, 1996), la ricerca sociologica applicata alla didattica ha individuato norme socio-matematiche che sono specifiche dell'attività matematica degli studenti. Esse regolano le argomentazioni matematiche e influiscono sulle opportunità di apprendimento, stabilendo per esempio ciò che si può considerare “matematicamente diverso”, “matematicamente sofisticato”, “matematicamente efficiente” e “matematicamente elegante”, così come ciò che si può considerare come una spiegazione matematicamente accettabile. Metodologicamente, tanto le norme sociali generali, quanto le norme socio-matematiche si creano nell'identificare regolarità (o rotture) nei modelli di interazione sociale. Hanno frequentemente un carattere “meta” dal momento che si riferiscono ad altre pratiche matematiche (giustificare, spiegare, operare eccetera).

In D'Amore, Font e Godino (2008) viene messo in evidenza come la classe di matematica costituisce una micro-società in cui ha luogo la costruzione e la diffusione della conoscenza matematica attraverso le interazioni sociali tra gli studenti e il docente. Di conseguenza, l'apprendimento matematico è condizionato da diverse metaconoscenze matematiche e didattiche. In questo articolo gli autori fanno un esame delle nozioni teoriche usate per lo studio delle norme che regolano la costruzione sociale della conoscenza matematica nei processi di insegnamento e apprendimento della matematica, usando alcune idee dell'approccio ontosemiotico della conoscenza e dell'istruzione matematica.

Un contributo ulteriore alla comprensione dell'apprendimento della matematica è fornito dall'approccio micro-sociologico proposto da D'Amore (2005), secondo il quale la classe è una società specifica di individui la cui unità sociale è garantita da un insieme di pratiche definite e condivise.

La classe, di fatto, risponde ai requisiti tipici che i sociologi esigono da un gruppo di individui per poter usare la denominazione di "società" (Robertson, 1977, p. 83). Tali requisiti sono: tali individui occupano un "territorio" comune (l'aula, la scuola); interagiscono fra di loro; sanno che appartengono allo stesso gruppo; hanno, almeno in parte, una cultura comune (o, per lo meno, questo è ciò che si suppone all'origine).

La classe può essere intesa, dunque, come una *comunità di pratiche* condivise (D'Amore, 2005; Godino & Batanero, 1994; Radford, 1997) che ha come scopo la costruzione di conoscenza (nel nostro caso: conoscenza matematica).

Ogni società determina le sue specifiche pratiche, alcune originate dagli scopi costitutivi delle società (a volte astratti), altri all'adattamento al fatto stesso di questa appartenenza. Dunque, queste "pratiche" si possono dividere in due grandi categorie: (1) quelle stabilite a priori da tale società (l'apprendere, il condividere attività eccetera); (2) quelle che nascono a causa del fine che tali attività si prefiggono di ottenere (la competitività, le azioni relative al contratto didattico, quelle tese a far supporre a chi deve valutare abilità di fatto non possedute eccetera).

Le prime sono pratiche codificate e dunque *funzionali* (Robertson, 1977); sono quelle che danno un significato alla costituzione stessa di tale società; le seconde, che in D'Amore (2005) sono definite *meta-pratiche*, sono dovute alla specifica situazione, e sono dunque a carattere extra funzionale. La tipologia delle pratiche deviate è diversa, rispetto a quella descritta in precedenza.

Tra le altre, abbiamo pratiche che permettono di giungere ai risultati desiderati utilizzando metodi non appropriati (per esempio, di fronte a un problema che chiede che giorno della settimana sarà il 30 gennaio 2030 con l'obiettivo di mettere in funzione l'algebra modulare, l'alunno risponde utilizzando un calendario che ha trovato in internet) oppure pratiche che chiaramente violano norme e metanorme del contratto didattico (per esempio,

quando l'allievo copia il lavoro di un compagno, sta rinunciando a esser protagonista della costruzione della propria conoscenza).

Le due tipologie di pratiche sono condizionate da prospettive diverse. Per esempio, all'interno della stessa classe, alcuni studenti hanno come obiettivo apprendere ciò che si è stabilito a priori come conoscenza da acquisire (significati istituzionali) (Godino & Batanero, 1994), per altri l'obiettivo è apprendere a influire nel giudizio che avrà chi valuta (questo fatto non è tipico solo delle classi dei primi livelli scolastici, ma di tutti i livelli, inclusa l'università e il postgrado; d'altra parte, esso è spesso è l'obiettivo principale di tutti, di natura generale: sociale, culturale, politica, economica ...).

In una classe generalmente non c'è condivisione totale degli scopi; dunque, come ci spiega la sociologia l'unitarietà del gruppo si perde ed essa tende a divenire un "gruppo secondario" in cui alcuni soggetti privilegiano le pratiche funzionali ed altri le metapratiche.

Tra gli studenti di una stessa classe, alcuni accettano le attività e gli obiettivi di apprendimento proposti dal docente come rappresentante di un'istituzione di riferimento e cercano di appropriarsi dei significati proposti.

Altri gruppi di studenti non assumono pienamente tali obiettivi e significati, o per carenze nelle necessarie conoscenze precedenti, o per inadattabilità ai compromessi scolastici. Il fatto che l'istruzione produca abilità e valori, come la trasmissione sistematica e formalizzata di conoscenze, dovrebbe portare alla realizzazione di determinate pratiche funzionali. Ma, dal momento che tale sistematicità e formalizzazione sono burocratizzate in un sistema sociale che prevede un'evoluzione, si determina automaticamente la necessità, in parte dei soggetti implicati, di realizzare determinate pratiche deviate come adattamento alla società-classe.

Ad esempio, le molteplici attività degli studenti tese ad interpretare le attese dell'insegnante nei loro confronti, rientrano nelle metapratiche.

L'esistenza di questo fenomeno fu segnalata come *contratto didattico* già negli anni '70 da Guy Brousseau (D'Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani, & Sarrazy, 2010).

È innegabile che questa attività sia quella che in sociologia si chiama una metapratica diffusa tra gli studenti; essa non rientra tra le pratiche del processo di insegnamento-apprendimento che costituiscono un senso alla società classe, ma piuttosto tra quelle dell'adattamento a tale società da parte dell'individuo.

Queste considerazioni a carattere sociologico spiegano bene una vasta classe di difficoltà degli studenti nell'apprendimento della matematica e nella pratica d'aula, quando l'argomento è la matematica (D'Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani, Santi, & Sbaragli, 2009). L'attenzione dello studente, il suo sforzo, si sposta da quelle che potrebbero essere definite le attività caratteristiche funzionali del gruppo classe e si trasformano in metapratiche che non hanno alcun valore nell'apprendimento, anzi lo bloccano e lo disorientano. L'insegnante può accorgersi che c'è una difficoltà, ma potrebbe

non capire quale ne sia l'origine. Uno studio concreto, anche ricco di esempi, in questo settore di difficoltà potrebbe dunque essere di grande aiuto all'insegnante per capire che cosa sta succedendo in aula.

La nozione di comunità di pratica consente inoltre di affrontare la questione del significato degli oggetti matematici (D'Amore, 2003; D'Amore & Fandiño Pinilla, 2001; Radford, 2005a), e di interpretare la mancata devoluzione come l'insorgere di metapratiche che inducono nell'allievo comportamenti devianti rispetto all'obiettivo di apprendere consapevolmente la matematica.

14. Ricerche sulla metacognizione sociale e individuale in didattica della matematica

L'uso che si fa in questo lavoro del prefisso "meta", applicato alle pratiche, ci porta a esplorare le ricerche didattiche che si sono interessate della dimensione "meta" (metacognizione e metacoscienza), in particolare il lavoro di Robert e Robinet (1996).

La metacognizione gioca un ruolo importante nella concettualizzazione della matematica. Robert e Robinet (1996) hanno condotto ricerche in una prospettiva interazionista, analizzando come si articola il *discorso sulla matematica* nelle pratiche d'aula. Per questi autori il prefisso "meta" si articola come:

- metacognizione riferita alla conoscenza che ha un soggetto dei suoi propri processi di risoluzione di problemi (controllo, supervisione, valutazione, ...);
- metacoscienze riferite a conoscenze potenziali di un soggetto (un allievo o un programmatore di curricoli) sull'apprendimento, sulla costruzione di conoscenze, cioè i metodi (specialmente scientifici), o sulla propria conoscenza: l'accento si pone sui contenuti più che sulla conoscenza che ha il soggetto di essi.

Le considerazioni che abbiamo svolto fino a questo punto mostrano che le conoscenze matematiche e didattiche sono oggetto di riflessione, classificazione e valutazione da parte di coloro che intervengono nella relazione didattica, dando luogo a nuove conoscenze di secondo ordine, o metacoscienze. È possibile condurre un'analisi degli aspetti trattati sopra in chiave ontosemiotica (D'Amore, Font, & Godino, 2008), adattando in termini sociologici la nozione di "gioco di linguaggio". Riteniamo che non sia possibile analizzare un processo di istruzione senza comprendere, detto con le parole di Wittgenstein (1953), le "regole del gioco di linguaggio" nel quale esso si sviluppa. In altre parole, il sistema di norme che regolano il funzionamento dei processi di insegnamento e apprendimento di un contenuto matematico specifico in un determinato contesto istituzionale.

Un ulteriore contributo fornito dalla sociologia alla didattica della matematica riguarda il problema del cambio o della perdita di senso degli oggetti matematici dovuto al passaggio tra loro rappresentazioni semiotiche (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2007a, 2007b). In questo ambito della ricerca in didattica, il connubio tra semiotica e approcci di tipo sociale e culturale ha portato risultati nella comprensione dei processi di apprendimento della matematica (Radford, 2005a, 2005b).

Queste ricerche mostrano che il significato degli oggetti matematici non è una relazione convenzionale tra segni ed entità matematiche ideali, che condurrebbe a considerare le diverse rappresentazioni semiotiche equisignificanti. Gli oggetti matematici sono piuttosto simboli di unità culturali che emergono da un sistema di utilizzazioni che caratterizzano le pragmatiche umane (D'Amore, 2003).

Anche le forme di mediazione semiotica attraverso le quali avviene l'apprendimento degli oggetti matematici sono culturalmente e socialmente costruite. Nella prospettiva semiotico-culturale di Radford (2005a), l'apprendimento concettuale si produce, dunque, nel luogo d'incontro tra la soggettività dell'allievo, i mezzi di oggettivazione socialmente costruiti e un sistema socio-culturale di significazioni. L'analisi puramente semiotico-strutturale non è dunque sufficiente per spiegare i cambi di senso dovuti a cambi di rappresentazione. Occorre analizzare, a un livello micro-sociale e storico-culturale, il sistema di pratiche legate agli oggetti matematici e alle diverse rappresentazioni semiotiche in gioco, e la loro evoluzione "metapratrica" che porta a comportamenti interpretativi esclusivamente locali e personali. (Su questo tema, si vedano: D'Amore, Font e Godino, 2007a, 2007b, 2008).

15. Conclusione

Un tentativo di analisi anche sommaria dell'idea che, a nostro avviso, sta alla base di tutte le teorie dell'attuale didattica della matematica, e cioè quella relativa alla natura degli oggetti della matematica, come abbiamo visto, non cessa di stupire per la sua complessità multiforme. Si passa rapidamente da analisi di tipo epistemologico (o, se si vuole, filosofico) e linguistico, a necessarie rassegne che evidenziano le posizioni critiche dei diversi autori.

Anche quando sembra che una tal teoria non prenda in esame questo specifico problema, in realtà lo fa, in forma più o meno esplicita, più o meno consapevole, più o meno profonda.

Di conseguenza, la bibliografia non può che essere multiforme e varia; noi siamo sempre sbalorditi di fronte al fatto che, a solo mezzo secolo o poco più dalla nascita della didattica della matematica, vi siano molte migliaia di citazioni possibili sugli stessi temi e posizioni così diverse, a volte radicalmente diverse. Nonostante tutto ciò, la nostra tendenza spontanea

inclina maggiormente verso le ipotesi di confronto e almeno parziale unificazione, piuttosto che verso separazioni inconciliabili.

Ringraziamenti

Gli autori esprimono i più sinceri e profondi ringraziamenti alla PhD Maura Iori, attenta e critica lettrice di una prima versione di questo testo; le sue acute e profonde analisi e i relativi suggerimenti di modifica hanno permesso un'opportuna e chiarificatrice revisione del testo in alcuni punti chiave.

Riferimenti bibliografici

- Abbagnano, N. (1971). *Dizionario di filosofia*. Torino: Utet.
- Arrigo, G., D'Amore, B., & Sbaragli, S. (2010). *Infiniti: Aspetti concettuali e didattici concernenti l'infinito matematico*. Trento: Erickson. [Traduz. in lingua spagnola: Arrigo, G., D'Amore, B., & Sbaragli, S. (2011). *Infinitos infinitos*. Bogotá: Magisterio].
- Astolfi, J. P., & Develay, M. (1989). *La transposition didactique en mathématique, en physique et biologie*. IREM de Lyon: LIRDIS.
- Bagni, G. T., & D'Amore, B. (2005). Epistemologia, sociologia, semiotica: La prospettiva socio-culturale. *La matematica e la sua didattica*, 19(1), 73–89.
- Bara, B. G. (1990). *Scienza cognitiva: Un approccio evolutivo alla simulazione della mente*. Torino: Bollati Boringhieri.
- Bloor, D. (1982). *Sociologie de la logique ou les limites de l'épistémologie*. Paris: Pandore.
- Brousseau, G. (1981). Address of members of the G.R.D.M (France) at the ICME IV. August 1980. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 2(1), 130–135.
- Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 33–115.
- Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Bruner, J. S. (1964). The course of cognitive growth. *American Psychologist*, 19(1), 1–15.
- Centro di studi filosofici di Gallarate (Ed.). (1957). *Enciclopedia filosofica*. Firenze: G. C. Sansoni.
- Chevallard, Y. (1991). Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l'activité mathématique. *Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique de Grenoble* (pp. 103–117). Grenoble: LSD2-Imag, Université Joseph Fourier.
- Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: Perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12(1), 73–112.
- Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de los didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221–266.
- Clary, M., & Genin, C. (1991). *Enseigner l'histoire à l'école?* Paris: Hachette-Istra.
- Cornu, L., & Vergnioux, A. (1992). *La didactique en questions*. Paris: Centre

National de Documentation Pédagogique-Hachette éducation.

- D'Amore, B. (1999a). *Elementi di didattica della matematica*. Bologna: Pitagora. [Traduz. in lingua spagnola: D'Amore, B. (2006). *Didáctica de la matemática*. Bogotá: Editorial Magisterio]. [Traduz. in lingua portoghese: D'Amore, B. (2007). *Elementos da didática da matemática*. São Paulo: Livraria da Física].
- D'Amore, B. (1999b). Scolarizzazione del sapere e delle relazioni: Effetti sull'apprendimento della matematica. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 22A(3), 247–276.
- D'Amore, B. (2001a). Un contributo al dibattito su concetti e oggetti matematici: La posizione “ingenua” in una teoria “realista” vs il modello “antropologico” in una teoria “pragmatica”. *La matematica e la sua didattica*, 15(1), 4–30.
- D'Amore, B. (2001b). Concettualizzazione, registri di rappresentazioni semiotiche e noetica. *La matematica e la sua didattica*, 15(2), 150–173.
- D'Amore, B. (2001c). Conceptualisation, registres de représentations sémiotiques et noétique: Interactions constructivistes dans l'apprentissage des concepts mathématiques et hypothèse sur quelques facteurs inhibant la dévolution. *Scientia Paedagogica Experimentalis*, 38(2), 143–168.
- D'Amore, B. (2003). *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della didattica della matematica*. Bologna: Pitagora. [Traduz. in lingua spagnola: D'Amore, B. (2005). *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la didáctica de la matemática*. México DF: Reverté-Relime].
- D'Amore, B. (2005). Pratiche e metapratiche nell'attività matematica della classe intesa come società: Alcuni elementi rilevanti della didattica della matemática interpretati in chiave sociologica. *La matematica e la sua didattica*, 19(3), 325–336.
- D'Amore, B. (2006a). Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. In L. Radford & B. D'Amore (Eds.), *Semiotics, culture and mathematical thinking* [Número especial]. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)*, 9(1), 177–195.
- D'Amore, B. (2006b). Conclusiones y perspectivas de investigación futura. In L. Radford & B. D'Amore (Eds.), *Semiotics, culture and mathematical thinking* [Número especial]. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)*, 9(1), 301–306.
- D'Amore, B. (2006c). Oggetti matematici e senso: Le trasformazioni semiotiche cambiano il senso degli oggetti matematici. *La matematica e la sua didattica*, 20(4), 557–583.
- D'Amore, B. (2007a). Epistemologia, didática da matemática e práticas de ensino. *Bolema. Boletim de Educação Matemática*, 20(28), 179–205.
- D'Amore, B. (2007b). How the treatment or conversion changes the sense of mathematical objects. In E. P. Avgerinos & A. Gagatsis (Eds.), *Current trends in Mathematics Education: Proceedings of 5th MEDCONF2007 (Mediterranean Conference on Mathematics Education)* (pp. 77–82). Athens: New Technologies Publications.
- D'Amore, B. (2007c). Mathematical objects and sense: How semiotic transformations change the sense of mathematical objects. *Acta Didactica Universitatis Comenianae*, 7, 23–45.
- D'Amore, B. (2008). Epistemology, didactics of mathematics and teaching practices.

Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 7(1), 1–22.

- D'Amore, B. (2011). La ricerca in didattica della matematica: Un esempio di ricerca: Oggetti matematici, trasformazioni semiotiche e senso. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 34B(3), 255–266.
- D'Amore, B. (2012). El debate sobre conceptos y objetos matemáticos: La posición “ingenua” en una teoría “realista” vs. el modelo “antropológico” en una teoría “pragmática”. In D. I. Calderón (Ed.), *Perspectivas en la didáctica de las matemáticas*. Énfasis: Libros de los énfasis del Doctorado Interinstitucional en Educación (Vol. 6, pp. 17–46). Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- D'Amore, B. (2015). Saber, conocer, labor en didáctica de la matemática: Una contribución a la teoría de la objetivación. In L. Branchetti (Ed.), *Teaching and learning mathematics: Some past and current approaches to mathematics education* [Numero speciale] (pp. 151–171). *Isonomia-Epistemologica: Online philosophical journal of the University of Urbino “Carlo Bo”*. Disponibile da http://isonomia.uniurb.it/archive_epistemologica_special/201509
- D'Amore, B. (2016). Una reflexión sobre los textos de Raymond Duval aquí presentados. In R. Duval & A. Sáenz-Ludlow (Eds.), *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: Perspectivas semióticas seleccionadas* (pp. 237–254). Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- D'Amore, B. (2017). Sapere, conoscere, lavoro in didattica della matematica: Un contributo alla teoria dell'oggettivazione. *Didattica della matematica: Dalle ricerche alle pratiche d'aula*, 1(1), 4–20.
- D'Amore, B. (in corso di stampa). Puntualizaciones y reflexiones sobre algunos conceptos específicos y centrales en la teoría semiótico cultural de la objetivación: Objetivación, saber y ontología, conocer y gnoseología, labor, semántica, comunicación. *Acti del Segundo Coloquio Internacional de la Teoría de la Objectivación*, Toronto, 17–20 gennaio 2017. *PNA: Revista de investigación en didáctica de la matemática*.
- D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2001). Concepts et objets mathématiques. In A. Gagatsis (Ed.), *Learning in Mathematics and Science and Educational Technology* (pp. 111–130). Nicosia, Cipro: Intercollege.
- D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2007a). How the sense of mathematical objects changes when their semiotic representations undergo treatment and conversion. *La matematica e la sua didattica*, 21(1), 87–92.
- D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2007b). Change of the meaning of mathematical objects due to the passage between their different representations: How other disciplines can be useful to the analysis of this phenomenon. Rome, *Symposium on the occasion of the 100th anniversary of ICMI*, March 2008. WG5: *The evolution of theoretical framework in mathematics education*. Disponibile da www.unige.ch/math/EnsMath/Rome2008
- D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2008a). The phenomenon of change of the meaning of mathematical objects due to the passage between their different representations: How other disciplines can be useful to the analysis. In A. Gagatsis (Ed.), *Research in Mathematics Education: Proceedings of the Conference of Five Cities: Nicosia, Rhodes, Bologna, Palermo, Locarno* (pp. 13–22). Nicosia: University of Cyprus.

- D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2008b). Change of the meaning of mathematical objects due to the passage between their different representations. In M. Menghini, F. Furinghetti, L. Giacardi, & F. Arzarello (Eds.), *The First Century of the International Commission on Mathematical Instruction (1908–2008): Reflecting and shaping the world of mathematics education* (pp. 304–305). Roma: Istituto della Enciclopedia Italiana – Collana Scienza e Filosofia.
- D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2017). Reflexiones teóricas sobre las bases del enfoque ontosemiótico de la didáctica de la matemática. In J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone, & M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del II Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico* (pp. 1–17). Granada, 23–26 marzo 2017. Disponibile da <http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html>
- D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., & Iori, M. (2013). *Primi elementi di semiotica: La sua presenza e la sua importanza nel processo di insegnamento-apprendimento della matematica*. Bologna: Pitagora. [Traduz. in lingua spagnola: D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., & Iori, M. (2013). *La semiotica en la didáctica de la matemática*. Bogotá: Magisterio]. [Traduz. in lingua portoghese: D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Iori, M. (2015). *Primeiros elementos de semiótica: Sua presença e sua importância no processo de ensino-aprendizagem da matemática*. Sao Paulo: Editora Livraria da Física].
- D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Iori, M., & Matteuzzi, M. (2015). Análisis de los antecedentes histórico-filosóficos de la “paradoja cognitiva de Duval”. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)*, 18(2), 177–212. doi:10.12802/relime.13.1822
- D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Marazzani, I., Santi, G., & Sbaragli, S. (2009). Il ruolo dell'epistemologia dell'insegnante nelle pratiche d'insegnamento. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 32B(2), 171–192.
- D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Marazzani, I., & Sarrazy, B. (2010). *Didattica della matematica: Alcuni effetti del contratto*. Bologna: Archetipolibri.
- D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Santi, G., & Sbaragli, S. (2011). Some relations between semiotics and didactic of mathematics. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 11(1–2), 35–57. [Questo articolo è apparso anche in: E. P. Avgerinos & A. Gagatsis (Eds.). (2012). *Research on Mathematical Education and Mathematics Applications: Proceedings of the 2nd International Conference of Universities of Five Cities (Rhodes, Nicosia, Palermo, Bologna and Locarno)* (pp. 139–158). Rhodes: Department of Education, University of Aegean].
- D'Amore, B., Font, V., & Godino, J. D. (2007a). La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. *Paradigma* 28(2), 49–77.
- D'Amore, B., Font, V., & Godino, J. D. (2007b). An onto-semiotic approach to representations in mathematical education. *For the learning of mathematics*, 27(2), 2–7, 14.
- D'Amore, B., Font, V., & Godino, J. D. (2008). La dimensione metadidattica dei processi di insegnamento e di apprendimento della matematica. *La matematica e la sua didattica*, 22(2), 207–235.
- D'Amore, B., Font, V., & Godino, J. D. (2010). Representations in mathematics education: An onto-semiotic approach. *International Journal for Studies in*

- Mathematics Education*, 2(1), 58–86.
- D'Amore, B., & Godino, J. D. (2006). Punti di vista antropologico ed ontosemiotico in didattica della matematica. *La matematica e la sua didattica*, 20(19), 9–38.
- D'Amore, B., & Godino, J. D. (2007). El enfoque ontosemiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)*, 10(2), 191–218.
- D'Amore, B., & Radford, L. (2017). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Problemas semióticos, epistemológicos y prácticos*. Bogotá: Editorial Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- D'Amore, B., Radford, L., & Bagni, G. T. (2006). Ostacoli epistemologici e prospettive socioculturali. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 29B(1), 11–40.
- D'Amore, B., & Sandri, P. (1996). Schülersprache beim Lösen mathematischer Probleme. *Journal für Mathematik Didaktik*, 17(2), 81–97.
- D'Amore, B., & Sbaragli, S. (2005). Analisi semantica e didattica dell'idea di "misconcezione". *La matematica e la sua didattica*, 19(2), 139–163.
- Dewey, J. (1961). *Come pensiamo*. Firenze: La Nuova Italia. [Lavoro originale: Dewey, J. (1933). *How we think*. Boston: Heath].
- Dummett, A. A. E. (1991). ¿Qué es una teoría del significado? In L. M. Valdés Villanueva (Ed.), *La búsqueda del significado* (pp. 370–409). Madrid: Tecnos.
- Duval, R. (1988a). Ecarts sémantiques et cohérence mathématique. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*, 1(1), 7–25.
- Duval, R. (1988b). Approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*, 1(1), 57–74.
- Duval, R. (1988c). Graphiques et équations. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*, 1(1), 235–253.
- Duval, R. (1993). Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5(1), 37–65.
- Duval, R. (1996). Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques? *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 16(3), 349–382.
- Duval, R. (1998). Signe et objet (I). Trois grandes étapes dans la problématique des rapports entre représentations et objet. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 6(1), 139–163.
- Duval, R., & Sáenz-Ludlow, A. (2016). *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: Perspectivas semióticas seleccionadas*. Bogotá: Editorial Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Ernest, P. (1991). *The philosophy of mathematics education*. London: Routledge-Falmer.
- Fanfani, P. (1855). *Vocabolario della lingua italiana*. Firenze: Le Monnier.
- Gagné, R. M. (1965). *The conditions of learning*. New York: Holt, Rinehart and Winston.
- Gal'perin, P. Ja. (1977). Contributo allo studio dello sviluppo intellettuale del bambino. In M. S. Veggetti (Ed.), *La formazione dei concetti: Sviluppo mentale e apprendimento* (pp. 43–63). Firenze: Giunti-Barbera. [Lavoro originale: Gal'perin, P. Ja. (1969). Stages in the development of mental acts. In M. Cole & I. Maltzman, *A handbook of contemporary Soviet psychology* (pp. 249–273). New York: Basic Books].

- Giordan, A., & De Vecchi, G. (1987). *Les origines du savoir: Des conceptions des apprenants aux concepts scientifiques*. Neuchâtel-Paris: Delachaux et Niestlé.
- Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 22(2–3), 237–284.
- Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 325–355.
- Godino, J. D., & Batanero, C. (1998). The dialectic relationships among theory, development and practice in mathematics education: A meta-analysis of three investigations. In N. A. Malara (Ed.), *An international view on didactics of mathematics as a scientific discipline: Proceedings of WG 25 ICME 8, Sevilla July 1996* (pp. 13–22). Modena: CNR-MURST-University of Modena.
- Godino, J. D., & Llinares, S. (2000). El interaccionismo simbólico en educación matemática. *Educación Matemática*, 12(1), 70–92.
- Iori, M. (2015). *La consapevolezza dell'insegnante della dimensione semio-cognitiva dell'apprendimento della matematica* (Tesi di Dottorato). Università di Palermo, Italia. Disponibile da <http://www.dm.unibo.it/rsddm/it/Phd/Iori/Iori.htm>
- Iori, M. (2017). Objects, signs and representations in the semio-cognitive analysis of the processes involved in teaching and learning mathematics: A Duvalian perspective. *Educational Studies in Mathematics*, 94(3), 275–291. doi: 10.1007/s10649-016-9726-3
- Istituto Giovanni Treccani (Ed.). (1929). *Enciclopedia italiana di scienze, lettere ed arti*. Roma: Istituto della Enciclopedia Italiana.
- Klausmeier, H. J. (1979). Un modello per l'apprendimento dei concetti. In C. Pontecorvo & P. Guidoni (Eds.), *Scienze e scuola di base: Problemi di didattica delle scienze* (pp. 67–81). Roma: Istituto della Enciclopedia Italiana fondata da G. Treccani.
- Klausmeier, H. J. (1980). *Learning and teaching concepts: A strategy for testing applications of theory*. New York: Academic Press.
- Klausmeier, H. J., Gathala, E. S., & Frayer, D. A. (1974). *Conceptual learning and development*. New York: Academic Press.
- Kutschera, F. von (1979). *Filosofia del lenguaje*. Madrid: Gredos.
- Lalande, A. (1926). *Vocabulaire technique et critique de la philosophie*. Paris: PUF.
- Lerman, S. (2000). The social turn in mathematics education research. In J. Boaler (Ed.), *Multiple perspectives on mathematics teaching and learning* (pp. 19–44). Westport: Ablex.
- Lurija, A. R. (1982). *Language and cognition*. Washington, DC: V. H. Winston.
- Maier, H. (1993). Conflit entre langue mathématique et langue quotidienne pour les élèves. *Cahiers de didactique des mathématiques*, 13(3), 86–118.
- Meirieu, P. (1987). *Apprendre... oui, mais comment?* Paris: ESF.
- Melzi, G. B. (Ed.). (1928). *Dizionario italiano completo*. Milano: Vallardi.
- Nelson, K. (1974). Concept, word and sentence: Interrelations in acquisition and development. *Psychological Review*, 81(4), 267–285.
- Nelson, K. (1977). Cognitive development and the acquisition of concepts. In R. S. Anderson, R. J. Spiro, & W. E. Montague (Eds.), *Schooling and the acquisition of knowledge* (pp. 215–253). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Piaget, J., Inhelder, B., & Szeminska, A. (1948). *La géométrie spontanée de l'enfant*.

- Paris: Presses Universitaires de France.
- Pontecorvo, C. (Ed.). (1983). *Conoscenza scientifica e insegnamento*. Torino: Loescher.
- Prediger, S., Bikner-Ahsbahr, A., & Arzarello, F. (2008). Networking strategies and methods for connecting theoretical approaches: First steps towards a conceptual framework. *ZDM Mathematics Education*, 40(2), 165–178.
- Radford, L. (1997). On psychology, historical epistemology and the teaching of mathematics: Towards a socio-cultural history of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 17(1), 26–33.
- Radford, L. (2003). Gestures, speech and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(1), 37–70.
- Radford, L. (2005a). Body, tool, and symbol: Semiotic reflections on cognition. In E. Simmt & B. Davis (Eds.), *Proceedings of the 2004 Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group* (p. 111–117). Edmonton: CMESG.
- Radford, L. (2005b). La generalizzazione matematica come processo semiotico. *La matematica e la sua didattica*, 19(2), 191–213.
- Radford, L. (2006a). The anthropology of meaning. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1–2), 39–65.
- Radford, L. (2006b). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. In L. Radford & B. D'Amore (Eds.), *Semiotics, culture and mathematical thinking*. [Número especial]. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)*, 9(1), 103–129.
- Radford, L. (2008a). *Theories in mathematics education: A brief inquiry into their conceptual differences* (Working paper). ICME 11, Survey Team 7: *The notion and role of theory in mathematics education research*.
- Radford, L. (2008b). Connecting theories in mathematics education: Challenges and possibilities. *ZDM Mathematics Education*, 40(2), 317–327.
- Radford, L. (2011). La evolución de paradigmas y perspectivas en la investigación: El caso de la didáctica de las matemáticas. In J. Vallès, D. Álvarez, & R. Rickenmann (Eds.), *L'activitat docente: Intervenció, innovació, investigació* (pp. 33–49). Girona: Documenta Universitaria.
- Radford, L. (2017). Ser, subjetividad y alienación. In B. D'Amore & L. Radford (2017), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos* (pp. 135–163). Bogotá: Editorial Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Radford, L., & D'Amore, B. (Eds.). (2006). *Semiotics, culture and mathematical thinking*. [Número especial]. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)*. México: Cinvestav.
- Robert, A., & Robinet, J. (1996). Prise en compte du méta en didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 16(2), 145–176.
- Robertson, I. (1977). *Sociology*. New York: Worth Publishers.
- Rojas Garzón, P. J. (2014). *Articulación de saberes matemáticos: Representaciones semióticas y sentidos*. Bogotá: Editorial de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas. [Libro tratto dalla omonima tesi di dottorato di ricerca, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá. Direttore: Bruno D'Amore].

- Santi, G. (2010). *Changes in meaning of mathematical objects due to semiotic transformations: A comparison between semiotic perspectives* (Tesi di dottorato, Direttore: Bruno D'Amore). Università di Palermo. Disponibile da www.dm.unibo.it/rsddm
- Santi, G. (2011). Objectification and semiotic function. *Educational Studies in Mathematics*, 77(2–3), 285–311.
- Santi, G., & Sbaragli, S. (2007). Semiotic representations, “avoidable” and “unavoidable” misconceptions [Special Issue]. *La matematica e la sua didattica, Joint Meeting of UMI-SIMAI/SMAI-SMF “Mathematics and its Applications”*, 21(1), 105–110.
- Sbaragli, S. (2005). L'importanza delle diverse rappresentazioni semiotiche: Il caso degli enti primitivi della geometria. *Bollettino dei Docenti di Matematica*, 26(50), 69–76.
- Sbaragli, S., & Mammarella I. C. (2010). L'apprendimento della geometria. In D. Lucangeli & I. C. Mammarella (Eds.), *Psicologia della cognizione numerica: Approcci teorici, valutazione e intervento* (pp. 107–135). Milano: Franco Angeli.
- Sierpiska, A. (1990). Some remarks on understanding in mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 10(3), 24–36.
- Sierpiska, A., & Lerman, S. (1996). Epistemology of mathematics and of mathematics education. In A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 827–876). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Speranza, F. (1997). *Scritti di epistemologia della matematica*. Bologna: Pitagora.
- Tornatore, L. (1974). *Educazione e conoscenza*. Torino: Loescher.
- Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight: A theory of mathematics education*. London: Academic Press.
- Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10(2–3), 133–170.
- Vergnaud, G. (2017). Due riflessioni sull'attività in matematica. *La matematica e la sua didattica*, 25(1), 7–12.
- Vygotskij, L. S. (1962). *Thought and language*. Cambridge: MIT Press. (Lavoro originale pubblicato nel 1934).
- Vygotskij, L. S. (1981). *The development of higher forms of attention in childhood*. In J. V. Werscht (Ed.), *The concept of activity in Soviet psychology* (pp. 189–240). Armonk, NY: Sharpe. (Lavoro originale pubblicato nel 1960).
- Vygotskij, L. S. (1985). *Pensée et langage* (F. Séve, Trad. fr.). Paris: Messidor Editions sociales. (Lavoro originale pubblicato nel 1934).
- Vygotskij, L. S. (1990). *Pensiero e linguaggio: Ricerche psicologiche* (L. Mecacci, Trad. it.). Bari: Laterza. (Lavoro originale pubblicato nel 1934).
- Wittgenstein, L. (1953). *Philosophical investigations*. New York: Macmillan.
- Wittgenstein, L. (1976). *Observaciones sobre los fundamentos de las matemáticas*. Madrid: Alianza.
- Zingarelli, N. (1994). *Lo Zingarelli 1995: Vocabolario della lingua italiana* (12. ed., 1. ed. 1922). Bologna: Zanichelli.